
UN INVITO ALLA LOGICA E ALLA TEORIA DEI GIOCHI¹

BRUNO CODENOTTI

Istituto di Informatica e Telematica (IIT-CNR), Pisa

Introduzione

Molte sono le domande intorno alla natura dell'uomo. Una delle possibili risposte è che l'uomo è un animale che ha coscienza di sé, una caratteristica che nasce dalla capacità di ragionare su se stesso e sulla realtà intorno a lui.

Quando si cerca di focalizzare la natura del ragionamento umano, ci si trova a dover stabilire ciò che è logico e ciò che è razionale. Ben presto si entra in contatto con il sottile confine tra vero e falso e con fenomeni controintuitivi, come i paradossi.

Questi sono presenti nella storia dell'umanità fin dai tempi più antichi e sembrano messi lì per creare perplessità riguardo a qualche suggerimento della nostra intuizione, oppure per invitarci a verificare la correttezza di ragionamenti apparentemente "logici".

Cosa si nasconde dietro a un paradosso? Siamo di fronte a giochi di parole? O a divertenti rompicapo che tutt'al più possono servire come ginnastica mentale? Oppure si tratta di astruse sottigliezze filosofiche da lasciare agli specialisti?

Qualche volta forse sì. Dietro a certi paradossi si celano semplicemente delle ambiguità linguistiche, come accade quando ragionamenti che sembrano esenti da errori mascherano in realtà concetti non ben definiti che ne minano alla base la correttezza. Ma non sempre le cose stanno così.

I paradossi più profondi indicano che qualcosa non va nella comprensione di un determinato fenomeno, e pertanto ci chiedono di cercare nuove strade, di usare strumenti di indagine diversi, di adottare nuovi punti di vista. Spesso contengono un'idea che con una piccola modifica porta ad una nuova importante scoperta.

Questa consapevolezza che "qualcosa non va" è il punto di partenza per riflettere sul ragionamento dell'uomo. Il tema portante è il ragionamento logico, ossia il ragionamento esente da contraddizioni, che da premesse vere conduce a conclusioni vere.

Il passaggio dall'ambito della *Logica* a quello della *Teoria dei Giochi* avviene quando si considera l'interazione tra il ragionamento logico di un singolo individuo e quello di altri. In questa prospettiva, diventa necessario procedere non solo con deduzioni, ma anche con controdeduzioni legate al ragionamento degli altri. Le deduzioni e controde-

¹ Lezione tenuta giovedì 21 novembre 2013, ore 11 - ISIS G. Vasari, Piazza Caduti di Pian d'Albero, Figline V.no (FI); venerdì 17 gennaio 2014, ore 11 - ISIS Il Pontormo, Via Raffaello Sanzio n. 159, Empoli (FI)

duzioni di ogni individuo opereranno su fatti ed eventi; ciascuno si dovrà preoccupare anche dei fatti che gli altri conoscono e degli eventi a cui hanno assistito, e, in particolare, di ciò che conoscono riguardo a ciò che egli conosce...

Da questa esigenza, emerge l'importanza di sapere quali informazioni siano condivise e che spazio abbia l'incertezza circa "i dati di partenza" del ragionamento di ciascuno.

Saremo così invitati a riflettere sul bagaglio di conoscenze comuni tra individui diversi, sulle differenze di informazione rispetto agli stessi fatti e a trarne le opportune conseguenze.

Fin qui la fa da protagonista il processo di deduzione logica, ma alla base del ragionamento umano c'è un principio più complesso: la razionalità. Per parlare di razionalità dobbiamo andare oltre la logica. Mentre ad un ragionamento logico chiediamo di essere esente da contraddizioni e di condurre da premesse vere a conclusioni vere, ad un comportamento razionale chiediamo, oltre a questo, ben altro.

Vediamo di cosa si tratta. La transizione dalla logica alla razionalità avviene quando il ragionamento logico del singolo si unisce alle sue aspirazioni e genera scelte rivolte a massimizzare le possibilità di realizzare tali aspirazioni.

Le interazioni tra individui che si comportano in modo razionale, ognuno con l'obiettivo di realizzare le proprie aspirazioni "private", avvengono in due contesti complementari: la suddivisione di risorse comuni e la composizione di preferenze individuali. I conflitti che ne conseguono portano a concludere che, quando gli individui non collaborano, "il meglio che possono fare è di evitare il peggio". Obiettivi più alti non possono essere raggiunti, perché in contrasto con la razionalità. La strada maestra per ovviare a questo inconveniente consiste nell'introduzione di meccanismi che conducano gli individui a collaborare: accordi vincolanti, regole e punizioni per infrazioni. Questi meccanismi fungono da surrogati per la fiducia negli altri, che sembra proprio violare i criteri fondamentali che stanno alla base della razionalità.

Come abbiamo notato prima, le discipline scientifiche che trattano gli argomenti sin qui accennati sono la logica e la teoria dei giochi.

Per motivi di spazio, nel resto di questo articolo ci dedicheremo ad un aspetto fondamentale legato ai paradossi logici, ossia l'autoriferimento.

Paradossi logici e autoriferimento

L'incontro con i paradossi ha interrogato e continua ad interrogare chi si occupa dei fondamenti della matematica. Piccole modifiche ad alcuni paradossi hanno condotto a rivoluzionarie scoperte nel mondo della matematica.

I paradossi più antichi risalgono al mondo greco, a cui dobbiamo la prima versione del *paradosso del mentitore* (attribuito al cretese Epimenide).

Esaminiamo la seguente versione di questo paradosso: **Questa frase è falsa.**

Se supponiamo che la frase in grassetto sia vera, allora ciò che la frase afferma deve verificarsi, ossia la frase è falsa, il che è una contraddizione. Se viceversa supponiamo

che la frase sia falsa, allora dev'essere vera la sua negazione, ossia la frase è vera, e così anche in questo caso si arriva ad una contraddizione.

Giunti a questo punto, ci dobbiamo chiedere se ci sia qualcosa che “non va” nel ragionamento che abbiamo appena presentato, oppure se ci siano problemi... a monte.

Iniziamo la nostra indagine osservando che la frase sotto esame è *autoreferenziale*, vale a dire fa riferimento a se stessa. L'autoreferenzialità è spesso causa di ambiguità che possono mettere in dubbio l'effettivo significato di un'affermazione che ne faccia uso. Per poter attribuire un valore di verità ad un'affermazione, è necessario che questa abbia un significato. Proponiamoci allora di escludere tutte le frasi che non abbiano un significato. Una prima “tentazione” potrebbe essere quella di eliminare il problema alla radice, non ammettendo affermazioni che facciano riferimento a se stesse. Questa decisione sembra essere troppo drastica. Ci sono infatti frasi autoreferenziali il cui significato è del tutto chiaro e che non avrebbe senso escludere.

Ad esempio, la frase *Questa frase ha cinque parole* è autoreferenziale, ma ha un significato ben preciso. Dopo avere colto tale significato, basta contare le parole per verificare che la frase è vera. Anche la frase *Questa frase ha sei parole* ha un significato chiaro: benché falsa, non ci sono dubbi su ciò che la frase afferma. Quindi il problema non sta sempre e solo nell'autoriferimento.

Consideriamo adesso la frase *Questa frase è vera*. Contrariamente al caso di “Questa frase è falsa”, che abbiamo esaminato sopra, la frase “Questa frase è vera” non comporta alcun paradosso, come si può facilmente verificare supponendola prima vera e poi falsa e osservando che non si giunge ad alcuna contraddizione. Nonostante questo, la frase non ha un significato ben preciso.

Vediamo allora come individuare un criterio generale per chiarire quali frasi debbano essere considerate legittime. Prima di poter stabilire la verità o la falsità di una frase, è necessario capirne il significato. Ad esempio, per stabilire la verità della frase “due più due fa quattro”, è necessario prima conoscere il significato delle parole che la compongono e poi capire ciò che la frase asserisce. Solo a questo punto (sapendo che due più due fa quattro e una volta capito che la frase asserisce proprio questo) si può affermare che la frase è vera. Queste osservazioni suggeriscono di considerare legittime solo frasi *la cui verità dipenda dal significato*, che vengono dette frasi *ben fondate*.

Proposizioni per cui questo non si verifica non hanno un senso compiuto prima che venga loro attribuito un valore di verità e pertanto non ci si può nemmeno chiedere se siano vere o false. Il paradosso del mentitore nasce dal fatto che la frase che lo esprime non è ben fondata.

Una formulazione del paradosso del mentitore che ovvia all'inconveniente che abbiamo esaminato e che torna particolarmente utile in svariati contesti si ottiene facendo ricorso alla distinzione tra *uso* di una certa frase e *riferimento ad essa*, che si può operare introducendo le *virgolette*. Data una frase F , indicheremo il riferimento ad F con “ F ”. Questa distinzione può alterare il significato di una frase e quindi il suo valore di verità.

Ad esempio, la frase *una sillaba consiste di due parole* è chiaramente falsa, mentre la frase *“una sillaba” consiste di due parole* è vera.

Consideriamo una frase A e il suo riferimento “ A ” e proponiamoci di costruire una frase che asserisca la propria falsità, come accade nel paradosso del mentitore, combinando tra loro A e “ A ”. L’idea è di costruire un’affermazione che abbia la forma “ A ” A . In questo caso, se sostituiamo ad A la frase *è falsa se è preceduta dal proprio riferimento*, otteniamo:

“è falsa se è preceduta dal proprio riferimento”
è falsa se è preceduta dal proprio riferimento

Questa frase asserisce la propria falsità e pertanto rappresenta un’altra versione del paradosso del mentitore. Si noti tuttavia che stavolta la frase non si riferisce esplicitamente a se stessa: l’autoriferimento avviene in modo implicito.

La tecnica che abbiamo descritto consente di evitare l’uso esplicito dell’autoriferimento ed è ampiamente utilizzata in logica e in informatica. Consideriamo ad esempio il seguente comando impartito ad un essere umano:

Ripeti la frase seguente due volte
“Ripeti la frase seguente due volte”

L’effetto provocato dall’esecuzione del comando è esattamente uguale al comando stesso: tramite l’autoriferimento, otteniamo la duplicazione del comando.

Il fenomeno che abbiamo mostrato si verifica solo con il numero due. Sono vani i tentativi di ottenere triplicazione, o quadruplicazione, usando il numero tre o il numero quattro. L’unica parola magica è *due*! Del resto, tutto questo era stato scoperto da madre natura molto tempo fa: basti pensare al meccanismo di duplicazione del DNA.

Venendo a tempi molto più recenti, i programmi per computer che stampano il proprio *codice sorgente* e anche alcuni *virus informatici* sono basati su questo principio.

Per questo genere di applicazioni, la strada da seguire è infatti di ideare un programma che abbia una struttura del tipo:

stampa la seguente sequenza di caratteri seguita dal proprio riferimento
“stampa la seguente sequenza di caratteri seguita dal proprio riferimento”

Non è difficile scrivere un programma che implementa questa idea in uno degli ordinari linguaggi di programmazione.

BIBLIOGRAFIA

- Bratley, Paul, Millo, Jean. Computer Recreations; Self-Reproducing Automata', Software -- Practice & Experience, Vol. 2, pp. 397-400 (1972).
- Burger, John, Brill, David, Machi, Filip. Self-Reproducing programs, Byte. August 1980. pp. 74-75.
- Smullyan, Raymond. ``Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula e altri indovinelli logici'', cur. M. Evangelisti, Zanichelli 1981.