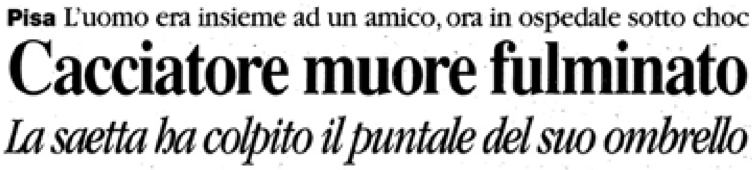
Matematica e coincidenze[1]

Giuseppe Anichini

Dipartimento di Matematica e Informatica "U.Dini", Università di Firenze

Ci chiediamo, con una certa frequenza, quando e come è possibile dire che due eventi (che potrebbero essere due terremoti, due esami con 30 e lode, un terremoto ed un 30 e lode!) sono "coincidenze" oppure si possa ritenere che essi abbiano una qualche "parentela"?



Pisa L'uomo era insieme ad un amico, ora in ospedale sotto choc

Cacciatore muore fulminato

La saetta ha colpito il puntale del suo ombrello

Nel dizionario la parola coincidenza è definita come:il casuale accadere di due fatti nello stesso tempo o in circostanze analoghe.

Ma è una "coincidenza" un fatto casuale? (Lo stesso dizionario per altro chiama coincidenza *corrispondenza d'orario tra l'arrivo in una località di un mezzo di trasporto pubblico e la partenza di un altro in diversa direzione!*).

Noi ogni giorno ridiamo, scherziamo o beviamo un cappuccino nello stesso bar, siamo accarezzati dallo stesso vento o bagnati dalla stessa pioggia nella stessa città, ma nessuno parlerebbe di ciò come di una coincidenza. E' dunque solo quando noi stessi attribuiamo agli eventi una certa "rarità" che usiamo questa locuzione.

Fin dall'antichità, i fenomeni naturali insoliti hanno spiazzato chi li osservava.

Soprattutto quelli atmosferici: gli antichi Greci, per esempio, consideravano il cielo perfetto e incorruttibile; le comete, che comparivano in modo non prevedibile, erano per questo temute in quanto apportatrici di disgrazie. Altre volte è una questione di pura incredulità: nel 2004, a Knighton, in Gran Bretagna, scrissero che piovevano pesci... era una "bufala"? Gli scienziati furono in grado di spiegare che fenomeni come questo sono causati da trombe d'aria che risucchiano i pesci e li trasportano lontano... dove poi cadono.

Le coincidenze sono sempre state piene di misteri: i Greci (Iliade, Odissea, …) erano pronti a"giustificare" una coincidenza, ovvero un fatto raro,come un capriccio degli dei.

Il vento aveva travolto la nave perché Poseidone aveva avuto una lite con una ninfa oppure *un fulmine aveva colpito una casa perché Giove non aveva gradito il pensiero di ….*

1 Lezione tenuta il 15 novembre 2012 presso l'IIS "E. Fermi", Empoli (FI)

Un errore in cui incorre spesso il senso comune è quello di equiparare eventi rari, cioè eventi a cui è associata una probabilità *piccola* di verificarsi, ad eventi (quasi) impossibili, ovvero “coincidenze”. Il fatto che una persona vinca ad una lotteria è veramente un evento raro? Lo può essere se pensiamo al nostro amico Carlo (che, sappiamo, ha acquistato il biglietto), ma sicuramente non impossibile (visto che qualcuno, forse Carlo, poi “vince”).

E qui entra in ballo il fattore *numerico*, ovvero quali numeri sono in gioco (e il loro ordine di grandezza). Nel caso di un “campione” veramente grande, i probabilisti ci dicono che può accadere qualsiasi cosa, per quanto strana ci possa sembrare: se una cosa accade ogni giorno a una persona su un milione e la popolazione italiana è di 60 milioni di persone, dobbiamo attenderci 60 coincidenze sorprendenti ogni giorno (ed una parte di queste coincidenze saranno riferite poi dalla stampa, saranno sottolineate su internet, ecc.).

Se un giorno qualcuno ha sognato un evento che si verifica una volta su mille la probabilità che NON si verifichi quel giorno è 999/1000. La probabilità che non si verifichi neppure il giorno successivo è $(999/1000)^2$*; la probabilità dunque che non si verifichi in un anno è* $(999/1000)^{365}$ *ovvero 0,69 (circa). La probabilità che NON si verifichi in 3 anni è 0,33 e questo vuol dire che si può verificare due volte su tre!*

Ad esempio, gli studi clinici solitamente sono effettuati su un numero limitato di soggetti e pertanto non possono evidenziare eventi rari, che invece possono essere evidenziati e valutati soltanto quando il vaccino è utilizzato in maniera massiva. Ci si è anche abituati all’idea che “eventi rari prima o poi si verificano” (ed i giornalisti, molto erroneamente, chiamano questo fatto come Legge dei Grandi Numeri).

Oggi non possiamo più trarre conclusioni, nè divine nè irrazionali. Il matematico americano Persi Diaconis ([2]), circa un decennio fa cominciò a chiedere a colleghi, amici e amici di amici, di segnalargli esempi di coincidenze a loro parere sorprendenti. Diaconis trovò che quasi tutte le – migliaia e migliaia di coincidenze indicate – potevano essere spiegate nei termini di alcune regole semplici.

Alcune coincidenze avevano cause nascoste, tali da non essere considerate alla stregua di vere coincidenze, altre venivano considerate tali grazie a fattori psicologici che rendono insolitamente sensibili a certi eventi accidentali ignorandone contestualmente altri. La maggior parte delle coincidenze, però, sono semplicemente eventi casuali che risultano essere molto più probabili di quanto non si immagini.

Un esempio del genere riguarda la data di nascita che tratteremo nel dettaglio fra qualche riga ([1]).

La stessa idea si applica in molte altre situazioni. Nel 1986, ad esempio,una donna del New Jersey vinse alla lotteria due premi di un milione di dollari ciascuno in quattro mesi. Ovviamente tutti pensano che essa abbia avuto una fortuna incredibile; eppure la probabilità che una cosa del genere possa accadere a qualcuno da qualche parte negli Stati Uniti è solo di 1 a 30. Poichè ogni giorno un numero grandissimo di persone compra biglietti della lotteria, qualcuno fra i molti milioni di giocatori ha qualche possibilità di vincere due volte.

Due persone che si incontrano a una festa possono scoprire di avere lo stesso nome, di provenire dalla stessa città, di avere un amico in comune o di abitare allo stesso numero civico. E' ovvio che le cose che due persone possono avere in comune sono talmente tante che si potrebbero trovare moltissime"coincidenze".

Analisi del genere sono cruciali non solo per comprendere il significato di coincidenze nella vita quotidiana, ma anche per scoprire connessioni o cause nascoste. Quando i ricercatori di medicina trovano nei loro dati strane concentrazioni di certe malattie, difetti congeniti o tumori, devono decidere se questi eventi rappresentano una manifestazione casuale e sfortunata o se possano rivelare una causa sottostante. E' accertato che moltissime coincidenze derivano da cause nascoste che non vengono mai scoperte.

Esempio 1*: Quanto pensereste che dovrebbe essere il numero (N) di persone presenti in una stanza perché almeno DUE di esse celebrino lo stesso compleanno? In altre parole potremmo dire: con quante persone presenti nella stanza scommetteresti "alla pari" (ovvero come su Testa o Croce lanciando una moneta perfetta) che almeno DUE di esse celebrano lo stesso compleanno*?

Ragioniamo in questo modo: siamo in una stanza con 22 persone e ciò significa che vi sono 22 possibilità che una di loro sia nata lo stesso mio giorno e mese. E ciò vale per ciascuna persona nella stanza. Le possibilità salgono a 253 coppie: la prima persona ha 22 possibilità di avere lo stesso compleanno con un'altra, la seconda persona 21 possibilità, la terza 20 e così via. Quindi in totale si hanno 22 + 21 + 20 + …+ 1 = 253. Lo stesso numero si ottiene calcolando $23x22/2 = 253$. (Si divide per due per evitare di contare la stessa coppia due volte).

Ci si chiede: qual è la probabilità di avere un compleanno *diverso* da un'altra persona? Lasciando perdere gli anni bisestili (e supponendo i giorni dell'anno ugualmente probabili) la probabilità richiesta è 364/365, ovvero circa il 99,7%. E questo sembra molto ragionevole.

Allora la probabilità che nessuna delle 253 coppie abbia lo stesso compleanno si otterrà moltiplicando 364/365 per se stesso 253 volte e ciò ci dà $(364/365)^{253} \sim 0{,}4995$. Pertanto la probabilità che *almeno DUE* di esse celebrino lo stesso compleanno è data da 1-0,4995 = 0,5005 ed abbiamo superato il .... 50%!

Riassumiamo i dati trovati nella seguente Tabella:

N	P
10	12%
20	41%
23	49,3%
24	50,7%
50	97%
100	99,99996%
200	$1 - 7 \times 10^{-73} \times 100\%$
300	$1 - 3 \times 10^{-131} \times 100\%$
≥ 366	100%

La Tabella ci dice che in 100 pullman di 50 persone, in 97 di essi almeno due persone celebrano lo stesso compleanno. E' ciò anti-intuitivo?

Nel problema dei compleanni nessuna delle due persone (che avranno lo stesso compleanno) è scelta a priori: ma se, durante il la vostra festa di compleanno vi chiedete *Quante persone invitare affinché ci sia probabilità del 50% di averne una nata nel vostro stesso giorno?*Allora le cose cambiano.

Indichiamo con $q(n)$ la probabilità richiesta, ovvero che un'altra persona invitata ha il vostro stesso compleanno. Abbiamo:

$$q(n) = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n .$$

Sostituendo $n = 23$, otteniamo (circa) 6,1%, ovvero un caso su 16. Perché tale probabilità superi il 50% ci vorranno almeno 253 coppie. (Notiamo che tale numero è molto più alto di 365/2 = 182,5: questo si spiega facilmente col fatto che fra i presenti nella stanza vi potranno essere una o più coppie con lo stesso compleanno). E non è una coincidenza che $253 = \frac{23 \times (23-1)}{2}$ sia il numero delle coppie di cui abbiamo detto poco sopra. E' importante notare che si contano le coppie e NON gli individui!

La Tabella che segue mette in relazione il numero delle persone ed il corrispondente numero di (possibili) coppie, cioè il numero di combinazioni a due a due. Da essa possiamo capire direttamente che i numeri di tali combinazioni crescono molto molto rapidamente.

Persone	*Combinazioni*
2	1
3	3
...	...
5	10
...	...
15	105
...	...
20	210
...	...
23	253
...	...
40	780

(Doppia) verifica sperimentale: abbiamo preso una giornata del campionato del 2005 ma lo stesso risultato lo abbiamo ottenuto nel febbraio scorso per 5 partite su 10 (ed in Cesena-Napoli vi era il compleanno fra uno dei giocatori e l'arbitro, che potremo pensare come il 23-simo !!).

Nella partita (del 15 maggio) Fiorentina- Atalanta (22 giocatori): Bernardini (Atalanta) e Lupatelli (Fiorentina)sono nati il 21 giugno. (Cejas non giocava, altrimenti ne avremmo avute due di coppie di compleanni!). Se poi prendiamo la rosa dei giocatori della Fiorentina del 2005 (23 giocatori): Cejas e Donadel sono nati il 21 aprile.

Nota: Ricordiamo sempre che i compleanni non sono uniformemente distribuiti: non tutti giorni sono "equiprobabili" (vi sono gli anni bisestili, a novembre nascono un po' meno figli che in altro mese, ci possono essere parti gemellari, ecc.; in Svezia, ad es., il 9,3% della popolazione è nata in Marzo ed il 7,3% in Novembre (e le statistiche svedesi danno un bel 8,3%!)).

Quello del compleanno NON è pertanto un vero e proprio paradosso (nel senso inteso dai logici) ma è così chiamato perché la "verità" matematica contraddice quella che è usualmente la risposta istintiva. L'istinto ci dice una cosa ma i "conti" ce ne dicono un'altra.

Elenchiamo adesso sinteticamente alcuni esempi in cui l'intuizione ed i conti possono andare non sempre nella stessa direzione.

Esempio: *Una segretaria distratta, nella redazione di un settimanale, fa cadere da una scrivania tutta la corrispondenza dei lettori con il Direttore del settimanale: una decina di lettere con le rispettive buste. Lettere e buste si distribuiscono sul pavimento in ordine sparso. La segretaria, nel maldestro tentativo di rimediare al proprio errore, rimette le lettere dentro le buste, in modo del tutto casuale. Qual è la probabilità che almeno una lettera sia al posto giusto?*

La risposta, cioè la probabilità che almeno una lettera sia al posto giusto viene calcolata come

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x2} - ... .$$

E qui sembra una coincidenza il fatto che, al variare del Numero N delle buste, la probabilità richiesta rimanga sostanzialmente la stessa (nel senso che già per $N = 6$ si ha una risposta corretta fino alla quarta cifra decimale!).

Altri Esempi: Per avere altri elementi di valutazione e poter decidere circa la "rarità" di un evento, abbiamo calcolato la probabilità, quasi sempre con considerazioni combinatorie, di altri eventi che ogni lettore può giudicare più o meno "rari":

- la probabilità che, facendo un numero a caso allo sportello Bancomat, si riesca a ricevere i soldi è 1:90000 ~0,00001.
- la probabilità di fare Poker (cioè ricevere dal mazziere 4 carte uguali, giocando a Poker, senza cambiare carte, con un mazzo di 52 carte) è 0,000240.
- la probabilità di avere Rosso, giocando alla roulette, per 14 volte consecutive, è 0,000061.

- la probabilità che il Lecce potesse vincere lo scudetto del campionato di calcio del 2000 - 2001, secondo le quote date dalle agenzie ufficiali nel settembre 2000, è 0,0099.
- la probabilità che tre piloti di formula 1 facciano, nelle prove, lo stesso tempo al centesimo di secondo è 0,000000002.

Il lettore più attento avrà riconosciuto uno degli eventi precedenti effettivamente verificatosi (26 ottobre 1997): i giornali scrissero *So amazingly the amazing thing happened!*

Ci si può chiedere: a cosa serve calcolare le probabilità di eventi "rari"?

Le compagnie di assicurazioni hanno bisogno di determinare dei costi anche in presenza di "catastrofi". Dunque devono calcolare anche la probabilità di eventi rari. Chi si occupa di tali conti? Ovviamente i Matematici con una buona preparazione in Statistica ed in Calcolo delle Probabilità. E lo stesso accade per: *compagnie finanziarie* (per analisi di mercato); *compagnie informatiche* (per analizzare comportamenti di software); *compagnie di telecomunicazioni* (per strategie ed analisi di comunicazione ottimale); *uffici legali* (esperti sulla aleatorietà, ad es. DNA, impronte digitali); *industrie aereospaziali* (per i calcoli del rischio). E l'elenco potrebbe continuare ...

BIBLIOGRAFIA

[1] Anichini, Giuseppe: *Qual è la probabilità di avere lo stesso compleanno?* Archimede 40 (1988), no. 1, 19 – 29;

[2] Mosteller, Frederick – Diaconis, Persi: *Methods for studying coincidences*, J. Amer. Statist. Assoc. 84 (1989), no. 408, 853 –861.