

LA MATEMATICA DELLE SCALE MUSICALI¹

FABIO BELLISSIMA

Università degli Studi di Siena

1. Introduzione

La divisione della matematica in aritmetica, musica, geometria e astronomia risale alla Scuola pitagorica. Per i Pitagorici, l'aritmetica era "la scienza che considera il numero per se stesso, la musica lo considera rispetto ad un altro numero; la geometria considera l'estensione come immobile, l'astronomia la considera mobile su se stessa." Questa suddivisione, in cui la musica è caratterizzata come la scienza dei rapporti tra numero e numero (vedremo il perché), è confluita nel *quadrivio* medioevale, e con esso si è conclusa; ma il legame tra la matematica e la musica è continuato per tutta l'età moderna, seppure su basi diverse. Ecco alcuni matematici che hanno trattato matematicamente di musica, con l'indicazione, quando esiste, della loro principale opera dedicata all'argomento: Pitagora (VI sec. a.C.), Archita (V-IV sec. a.C.), Euclide (*La sezione del canone*, IV-III sec. a.C.), Tolomeo (*I tre libri armonici*, II sec. d.C.), Cardano (*De Proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum*, 1570), Keplero (*Harmonices Mundi Libri V*, 1609), Galileo, Cartesio (*Compendium musicae*, 1618), Fermat, Leibniz, Mersenne (*Harmonie universelle*, 1636), Huygens (*Novus Cyclus Harmonicus*, 1724), D'Alambert, Eulero (*Tentamen Novae Theoriae Musicae*, 1739).

2. La creazione di una scala musicale

Tutti questi autori si sono concentrati principalmente su un problema: il posizionamento delle note della scala musicale. Definire questo problema può risultare arduo, e non perché esso richieda concetti elaborati, ma perché, al contrario, non è riconosciuto come tale. Infatti la sequenza sonora *do-re-mi-fa-sol-la-si-do* è ormai talmente radicata nel nostro modo di concepire la musica, che la trattiamo come un *a priori*. Invece, essa è il frutto di un lungo sforzo congiunto di musicisti e matematici. La creazione di una scala rappresenta una tappa fondamentale nello sviluppo culturale di un popolo: quella in cui la musica, superato lo stadio primitivo, si avvia a diventare un sistema strutturato. Questa fase è tutt'altro che iniziale. Per poter concepire l'idea di scala, intesa come serbatoio di suoni singoli, è necessario disporre di un repertorio musicale ricco e consolidato (senza il quale difficilmente può scattare l'estrapolazione del singolo suono dal contesto in cui si trova) e di una pluralità di ambiti sociali e culturali soggetti a regole (senza i quali altrettanto difficilmente può essere avvertita l'esigenza di sottoporre a

¹ Lezione tenuta il 23 febbraio 2013 presso il Liceo "G. Pascoli", Firenze.

regole i suoni). E' evidente che una cultura può giungere a soddisfare queste due condizioni solo dopo un lungo processo evolutivo.

Il concetto che presiede alla formazione delle scale (il plurale è d'obbligo, in quanto i tentativi fatti sono stati molti e vari, sia nel numero che nella posizione delle note) è quello di *consonanza*. Stando al dizionario, "un intervallo tra due note si dice consonante se, suonando le due note simultaneamente, si ottiene un effetto di gradevolezza e di quiete; si dice invece dissonante se il suono produce un senso di instabilità e di tensione." Visti i termini impiegati (gradevolezza, quiete, tensione) sembra che il concetto sia vago e soggettivo. Invece non è così, almeno per le consonanze fondamentali. In qualunque parte del mondo, quando un uomo e un bambino cantano insieme la stessa aria, non emettono le stesse note, cioè suoni alla stessa altezza, ma note diverse, che però formano costantemente tra loro un intervallo detto di *ottava*. La somiglianza - meglio sarebbe dire l'equivalenza - tra due suoni formanti questo intervallo è così forte che i Greci lo chiamarono *diapason*, 'attraverso tutto', a significare che esso contiene, a meno d'equivalenza, tutti i suoni. Noi, invece, pur nominandolo alla stregua degli altri intervalli (*ottava* come *quinta*, *terza*, *decima*...), abbiamo sancito l'equivalenza che esso induce tra i suoni in modo ancora più forte, attribuendo a suoni distanti un'ottava lo stesso nome: *do, re, mi, fa, sol, la, si*, e poi di nuovo - ma un'ottava sopra - *do, re, mi, fa, sol, la, si* (ricorrendo a indici o apici solo quando è necessario distinguere tra suoni omonimi ma diversi in altezza). Questa equivalenza rende possibile una più precisa definizione di *scala*. Il principale significato musicale del termine è infatti proprio questo: selezione di suoni all'interno di un'ottava.

Se l'ottava è servita a stabilire l'ampiezza di una scala (ad esempio *do-do*), per le note interne ci si è affidati alle altre consonanze, prime fra tutte la *quinta* (ad esempio *do-sol*) e la *quarta* (ad esempio *do-fa*). Il criterio costruttivo delle scale è stato infatti quello di individuare, all'interno di un'ottava, un numero ragionevole di suoni in grado di produrre il maggior numero di combinazioni consonanti possibili. E' necessaria una precisazione: i nomi che noi diamo alle consonanze (ottava, quinta, quarta, ...) sono legati al numero di note che tali intervalli coinvolgono nella scala *do, re, mi, fa, sol, la, si, do*. Ciò sembrerebbe indicare che la scala abbia preceduto le consonanze, in palese contraddizione con quanto stiamo affermando. In realtà, i nomi più antichi delle consonanze non avevano alcun riferimento numerico (ottava, quinta e quarta erano, per i primi Pitagorici, *harmonia*, *diossia* e *sillaba*); solo in seguito, a scala ottenuta, sono cambiati.

3. La scoperta di Pitagora

Quando, nella Grecia del VI secolo a.C., avvenne l'incontro tra la matematica e la musica, la posizione relativa di alcune note si era ormai stabilizzata secondo lo schema di Figura 1A (i nomi, naturalmente, sono moderni); le altre note, una o due all'interno di ciascuna delle due quarte, non avevano ancora una posizione definitiva. Su questo impianto sonoro, fondato sulle consonanze di ottava, quinta e quarta, si è inserita la "Scoperta di Pitagora".

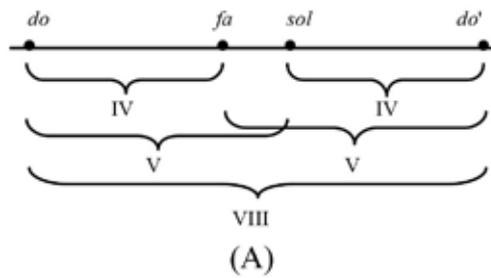


Figura 1a

Supponiamo che una corda libera produca un certo suono, diciamo *do*. Per ottenere un suono più acuto di un'ottava (cioè per ottenere *do'*) dobbiamo interrompere la corda esattamente ad $1/2$ della sua lunghezza; per ottenere un suono più acuto di una quinta (*sol*) dobbiamo interromperla ai $2/3$; per ottenerlo più acuto di una quarta (*fa*) dobbiamo interromperla ai $3/4$. Per esprimerci alla maniera dei Greci - che parlavano di rapporti e non di frazioni ed anteponevano il numero più grande a quello più piccolo - si scoprì che ad ottava, quinta e quarta corrispondevano rispettivamente i rapporti 2:1, 3:2 e 4:3.

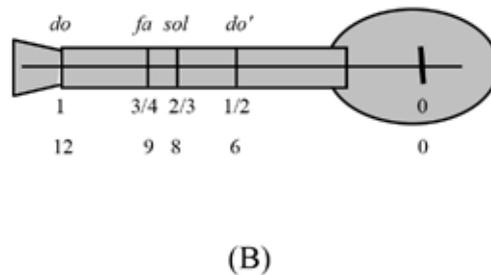


Figura 1b

A destare scalpore non fu la scoperta che le consonanze erano rappresentabili da rapporti numerici. Fu il fatto che fossero esprimibili da *quei* rapporti numerici: i primi quattro numeri naturali, da cui si ottengono, in ordine decrescente di grandezza, i primi tre rapporti del tipo $(n+1)/n$, i quali producono, in ordine decrescente di importanza, le tre consonanze fondamentali. Ciò spinse i Pitagorici a credere che tutto fosse rappresentabile in termini numerici, e che lo fosse in modo semplice e ordinato. Anzi, secondo la testimonianza di Aristotele (*Metafisica*, Z2, 1028), li condusse - con un salto per noi difficilmente comprensibile - alla convinzione che tutto fosse numero: "I Pitagorici, per il fatto che vedevano molte proprietà dei numeri presenti nei corpi sensibili, supposero che le cose reali fossero numeri. E perché? Perché le proprietà dei numeri si trovano nella musica, nel cielo e in molte altre cose". In effetti, l'influenza che questa scoperta armonica ebbe sulla filosofia pitagorica, e in seguito su quella platonica, fu enorme e durò per secoli. Nell'affresco della *Scuola di Atene* di Raffaello, in basso a sinistra, un giovane biondo regge una lavagnetta scrutata da un vecchio che scrive su

un libro. Il vecchio è Pitagora, e sulla lavagnetta vi è uno schema concettualmente identico alla nostra Figura 1A (le parole *diatessaron*, *diapente* e *diapason* stanno per quarta, quinta e ottava). Ancora nel '500, quindi, il carattere distintivo della Scuola pitagorica era il rapporto tra numeri e suoni. Un'osservazione: dove in Figura 1A compaiono i nomi delle note, sulla lavagnetta compaiono i numeri 12, 9, 8, 6. Poiché i Greci non disponevano del linguaggio delle frazioni, per esprimere una pluralità di rapporti indicavano la sequenza dei minimi numeri naturali che li producevano simultaneamente. Per i rapporti tra le note in questione i numeri sono proprio 12, 9, 8, 6, dal momento che $12:6 = 2:1$ (ottava), $12:8 = 9:6 = 3:2$ (quinte) e $12:9 = 8:6 = 4:3$ (quarte).

4. La scala pitagorica

Torniamo alle scale. La prima ad essere definita in termini rigorosi è stata la *scala pitagorica* ottenibile direttamente dallo schema di Figura 1A. Preso l'intervallo di *tono*, definito come differenza tra una quinta ed una quarta (primo esempio di intervallo non consonante ottenuto tramite intervalli consonanti), si divide in intervalli di tale ampiezza ciascuna delle due quarte. Questa divisione lascia un resto: infatti una quarta contiene due toni più una parte residua, il *semitono pitagorico*. Possiamo, senza con ciò essere fuorvianti, indicare le note della scala così ottenuta con i nomi *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *do'*. Infatti il suono della scala pitagorica differisce davvero poco da quello della scala dei tasti bianchi dei nostri pianoforti (semmai potrebbe sembrare il suono di un pianoforte qua e là un po' scordato).

Nel determinare - partendo da quelli delle consonanze fondamentali - i valori numerici corrispondenti agli intervalli di tono e semitono, i Pitagorici si trovarono di fronte ad una difficoltà. Il tono è stato definito come *differenza* tra una quinta e una quarta, ma il rapporto corrispondente al tono non è $(3/2) - (4/3)$, bensì $(3/2)/(4/3)$, cioè $9/8$ (nella quaterna 12, 9, 8, 6 è l'intervallo tra 9 ed 8). Questo sfasamento tra operazione intuitiva e operazione reale non si limita a questo singolo caso, ma è generalizzato. Ad esempio, un'ottava è percepita come la somma di una quinta e una quarta (v. ancora Figura 1), ma $2/1$ non è la somma bensì il prodotto tra $3/2$ e $4/3$. Abbiamo dunque quozienti percepiti come differenze e prodotti percepiti come somme. Per chi la conosce, la parola che a questo punto viene in mente è *logaritmo*. In effetti, solo con l'introduzione dei logaritmi i teorici musicali poterono operare sugli intervalli senza timore di sbagliare. I Greci e i Medioevali, che non li conoscevano, dovettero invece procedere con cautela. Poiché al tono corrisponde il valore $9/8$, al semitono, che è una quarta meno due toni, non corrisponde il valore $(4/3) - ((9/8) + 9/8)$, bensì $(4/3)/((9/8) \cdot (9/8))$, cioè $256/243$. I valori della scala pitagorica sono dunque quelli di Figura 2, dove sono anche indicati, alla maniera dei Greci, i minimi numeri naturali in grado di produrli simultaneamente. (E a questo punto capiamo perché i Pitagorici identificarono la musica con la teoria dei rapporti tra numeri naturali: in nessun altro contesto capitava, allora, di comporre assieme così tanti rapporti numerici!).

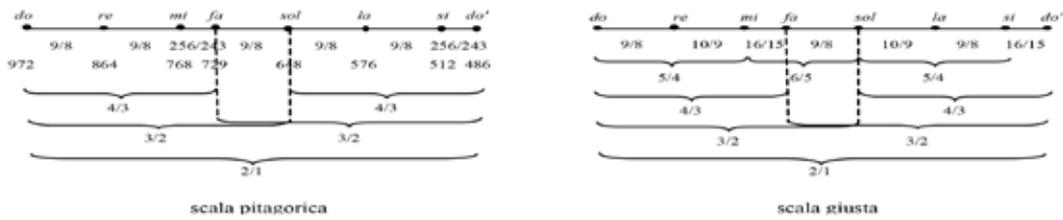


Figura 2

5. La scala giusta

La scala pitagorica ebbe un importante ruolo metafisico: secondo Platone (*Timeo*, 36A-B) i rapporti di questa scala erano quelli con cui il Demiurgo aveva costruito l'universo ("armonia delle sfere"). Ma ebbe anche un plurisecolare impiego propriamente musicale, che entrò in crisi solo quando la polifonia medioevale incominciò ad usare frequentemente intervalli di terza maggiore (ad esempio *do-mi*). Il rapporto 'giusto' per tale intervallo è $5/4$ (ormai è chiaro: le consonanze prediligono i rapporti tra numeri piccoli, fatto che troverà giustificazione nella moderna Teoria degli armonici). Invece, l'intervallo *do-mi* della scala pitagorica è $(9/8) \cdot (9/8) = 81/64$, crescente di $81/80$ rispetto a $5/4$, cioè $80/64$. La scelta che alla fine prevalse fu quella di restringere un poco l'intervallo *re-mi*, in modo che la somma dei toni *do-re* ($9/8$) e *re-mi* (nuovo) producesse una terza *do-mi* giusta. A *re-mi* toccò pertanto il rapporto $(5/4)/(9/8) = 10/9$. Stessa sorte toccò all'intervallo *la-si*. Gli intervalli di semitono passarono così da $256/243$ a $16/15$ ($= (4/3)/(5/4) = (256/243) \cdot (81/80)$). Questo processo portò dalla scala pitagorica alla *scala giusta*, conosciuta anche come *scala naturale* o *scala di Zarlino*, in onore al teorico fiorentino che, nel '500, la presentò in modo organico (v. Figura 2). Il suono di questa nuova scala non è ancora quello dei tasti bianchi del nostro pianoforte, ma questa volta, se suonassimo un pianoforte accordato su di essa, non percepiremmo qua e là delle stonature, come nel caso pitagorico, ma, al contrario, ascolteremmo un suono più limpido di quello a cui siamo abituati. Perché allora i nostri pianoforti non sono accordati così?

6. La scala temperata

Il problema è nel cambio di tonalità. Se, partendo da *re*, suoniamo la sequenza *re-mi-fa-sol-la-si-do'-re'*, non otteniamo la melodia *do-re-mi-fa-sol-la-si-do'* un tono più alta, bensì una melodia diversa. Questo accade con la scala giusta, ma anche con la scala pitagorica e con la scala dei tasti bianchi dei nostri pianoforti, dal momento che tutte queste scale presentano una successione di intervalli che non è invariante per traslazioni. In ogni caso quindi, se si vuole ottenere, partendo dal *re*, la "stessa" melodia - un po' più alta - che si ottiene partendo dal *do'* bisogna aggiungere alcune note nuove (chi ha studiato

musica sa che, sui nostri pianoforti, al posto dei tasti bianchi *fa* e *do* bisogna impiegare i tasti neri *fa#* e *do#*). Il fatto è che, con la scala giusta, le note da aggiungere sono troppe, e ogni aggiunta ne comporta altre, all'infinito. Ciò non rappresenta un problema per il canto, e neppure per gli strumenti privi di tasti come il violino: di volta in volta il cantante o il violinista trovano, nel *continuum* sonoro a loro disposizione, i suoni che servono. E' invece un problema grave per gli strumenti a tasti, come liuti, chitarre, organi e pianoforti. La soluzione che prevalse fu la più drastica. Si sacrificò la purezza di tutte le consonanze tranne l'ottava allo scopo di ottenere, con la sola aggiunta di cinque note per ottava (i tasti neri), la "stessa" successione di intervalli partendo da qualunque nota. Si divise infatti l'ottava in dodici intervalli uguali, assegnandone uno ai semitoni e due ai toni: in tal modo ciascun tono è l'esatto doppio di ciascun semitono. La scala così ottenuta venne chiamata *scala temperata*. In essa l'intervallo di quinta, anziché $3/2$ (= 1.5), è 1.49... ; l'intervallo di quarta, anziché $4/3$ (= 1.(3)), è 1.335...; l'intervallo di terza maggiore, anziché $5/4$ (= 1.25), è 1.22...(dunque sensibilmente calante). A ritardare l'affermazione della scala temperata non furono soltanto le resistenze di molti musicisti, restii ad accettare queste piccole stonature. Furono anche difficoltà di tipo matematico. Tutti gli intervalli della scala temperata, esclusa l'ottava, sono espressi da numeri irrazionali. Dai Pitagorici in poi questo tipo di grandezze, non gestibili come rapporti tra numeri interi, fu guardato con grande sospetto. Da un punto di vista pratico, inoltre, il calcolo del valore del semitono temperato - che, essendo la dodicesima parte dell'ottava, è, per lo sfasamento logaritmico, la radice dodicesima di 2 - costò notevoli sforzi (una buona stima la diedero Stevino e Mersenne, nella prima metà del '600). Ma, alla fine, la scala temperata prevalse sulle altre, e la sua vittoria è stata così totale che, nel nostro sapere comune, non vi è più traccia né delle sue concorrenti né delle fatiche che la sua creazione ha comportato. E' insomma diventata, come dicevamo all'inizio, un *a priori*.