Il fascino dell'infinito

Franca Cattelani Degani

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata «G. Vitali»
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, sede di Modena

1. Un tema che riguarda la matematica, ma non solo

«L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso più profondamente lo spirito umano»: sono parole di David Hilbert, uno dei più grandi matematici vissuti tra XVIII e XIX secolo, e facilmente condivisibili.

Basti pensare allo stupore che coglie il bambino quando s'accorge che, scelto un numero comunque grande, se ne può trovare uno ancor più grande, e poi uno ancor più grande e così via, senza mai giungere ad una fine. Si pensi all'enorme difficoltà incontrata da una cultura evoluta come quella greca nel maneggiare l'infinito; si pensi alla ripetizione continua di un fregio, come si ammira in tanti monumenti arabi, quasi per voler dare l'idea dell'immensità e non finitezza di un essere superiore le cui sembianze è vietato ed impossibile riprodurre.

L'infinito è un tema basilare per la matematica, potremmo dire che ne è il pane quotidiano, anche se riguarda in primo luogo la filosofia e la teologia, ma non ne sono esenti altre discipline, come l'arte (l'abbiamo appena detto poc'anzi), la letteratura, ...

Una delle poesie più note ai nostri studenti è *L'infinito* di Giacomo Leopardi.

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e rimirando, interminati
spazi di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quiete
io nel pensier mi fingo; ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio a questa voce
vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così tra questa

immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare.

Nel testo, la parola che dà il titolo alla composizione, appare esplicitamente, una sola volta e come aggettivo di *silenzio*; ma a nostro avviso nella prima parte della poesia l'autore riesce a dare l'idea di un infinito spaziale in termini in cui si può trovare una forte assonanza con ciò che si usa in matematica per definire che una successione diverge a $+\infty$: «scelta una costante comunque grande, i termini della successione da un certo punto in poi superano tutti quella costante». Ebbene, nella poesia, la funzione della costante arbitraria è svolta dalla *siepe*, che non si sa bene dove sia, può essere vicina o lontana, ma di là da quella si stendono gli *interminati spazi* fino *all'ultimo orizzonte.*

Nella seconda parte del componimento appare un altro tipo di infinito: l'*infinito temporale,* espresso dall'*eterno,* e che sappiamo essere costituito da un passato (*le morte stagioni*), un presente e – cosa che manca nella poesia – un futuro, forse a causa del pessimismo leopardiano che impedisce all'autore di guardare avanti.

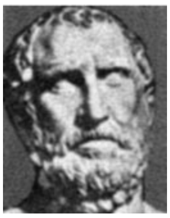
L'infinito spaziale è alla base della geometria. Se vogliamo tracciare una retta, riusciamo a disegnarne solo una porzione e poi pensiamo che essa si estenda da un lato e dall'altro senza fine; così pure, tutte le volte che tracciamo due assi cartesiani, intendiamo che essi individuino un piano che si estende in ogni direzione al di là di ogni confine**.**

C'è però un altro aspetto dell'infinito con cui la matematica ha spesso a che fare: è l'infinito numerico o come numerosità, ed è ciò su cui vogliamo concentrare la nostra attenzione.

2. Con l'infinito è facile imbattersi in paradossi

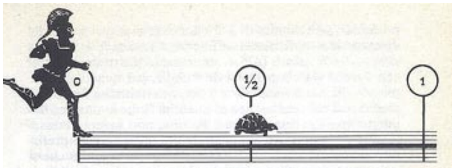
Quando disegniamo un segmento o una circonferenza, per noi è naturale pensare che abbiamo sotto gli occhi un insieme costituito da infiniti punti. La cosa non era così ovvia per i greci, che seguendo il diktat aristotelico «Infinitum in actu non datur», accettavano solo l'infinito potenziale e non quello attuale.

Anche le suddivisioni successive facevano sorgere questioni insolubili e al proposito sono noti i paradossi di Zenone di Elea (~ 450 a.C.), come quello dell'*atleta* o quello del *piè veloce Achille e la tartaruga.*



Nel primo caso si suppone che ci sia un atleta che deve percorrere un tragitto, ma: prima di percorrere l'intero tragitto, egli dovrà percorrerne la metà; prima di percorrerne la metà, dovrà percorrerne la metà della metà, cioè $\frac{1}{4}$; prima di percorrerne $\frac{1}{4}$, dovrà percorrere la metà di $\frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{8}$; prima di percorrerne $\frac{1}{8}$, dovrà percorrerne la sua metà, cioè $\frac{1}{16}$; e così via. Ed il procedimento si prolunga senza fine, quindi Zenone giungeva alla conclusione che l'atleta non potrà mai partire e, di conseguenza, nemmeno arrivare, in evidente contraddizione con ciò che accade nella realtà.

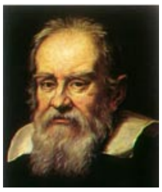
Nel secondo caso si suppone che il *piè veloce Achille* gareggi con una tartaruga, il simbolo per antonomasia della lentezza. Si suppone che la velocità di Achille sia per esempio il doppio di quella della tartaruga e che dovendo compiere un certo percorso, alla tartaruga venga dato un vantaggio, ad esempio pari alla metà del percorso.



Achille e la tartaruga partono contemporaneamente e quando Achille giunge al punto medio del percorso, la tartaruga avrà percorso $\frac{1}{4}$ dell'intero cammino, e si troverà ai $\frac{3}{4}$ dal punto di partenza di Achille; in particolare sarà davanti ad Achille.

Quando Achille giungerà ai $\frac{3}{4}$ del percorso, la tartaruga, pur lenta che sia, avrà percorso un altro trattino pari ad $\frac{1}{8}$ del percorso e quindi si troverà a $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ del percorso, cioè ancora davanti ad Achille, e così via. Zenone concludeva che allora la tartaruga precederà sempre Achille, mentre sappiamo che nelle condizioni ipotizzate Achille e la tartaruga giungono a fine percorso contemporaneamente e, se la corsa continuasse, Achille precederebbe la tartaruga.

La teoria delle serie geometriche, alcune delle quali furono brillantemente utilizzate già da Archimede[1], permise di dirimere questioni come le due sopra presentate, ma col trascorrere dei secoli fecero capolino nuovi paradossi sull'infinito. Si scontrò con essi anche Galileo.



Nel suo *Discorso e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) egli pone sulla bocca di Salviati la domanda: «Onde se io dirò, i numeri tutti[2], comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così ?» Galileo ben conosce l'antico assioma euclideo secondo cui «la parte è minore del tutto», e quindi, fa rispondere a Simplicio: «Non si può dir altrimenti».

Salviati però prosegue: «Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, lor esser tanti quante son le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo».

La situazione può essere ben illustrata dal seguente schema:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, …

1, 4, 9, 16, 25, …

1, 2, 3, 4, 5, …

Nella prima riga sono elencati in ordine i numeri naturali e nella seconda sono stati selezionati dalla prima riga quelli che sono quadrati perfetti; per le ampie lacune che si creano, questi sembrano di meno dei numeri della prima riga. Nella terza riga, sotto ad ogni quadrato è stata posta la propria radice, ed è evidente che si ritrovano esattamente tutti i numeri delle prima riga. Pertanto i numeri della seconda riga non possono essere di meno di quelli della prima.

Galileo conclude: «Infiniti esser tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di maggiore e minore non aver luogo ne' gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate». Pertanto, secondo Galileo non è possibile – non ha senso – confrontare tra loro due infiniti.

Nel 1851 uscì postuma l'opera di Bernard Bolzano (1781-1848) dal titolo *I paradossi dell'infinito*[3].

Qui l'autore pone le seguenti domande:

- se [**a,b**] è un intervallo della retta contenuto in [**a,c**], i punti di [**a,b**] sono di meno di quelli di [**a,c**]?
- i numeri razionali tra **0** e **5** sono meno dei razionali tra **0** e **12** ?

Sembrerebbe naturale dover rispondere con un sì, ma lo stesso Bolzano fa notare che ogni volta che si sceglie un punto **x** in [**a,b**] si può impostare la proporzione:

$$\overline{\mathbf{ab}} : \overline{\mathbf{ax}} = \overline{\mathbf{ac}} : \overline{\mathbf{ay}}$$

che, per l'unicità del quarto proporzionale, determina uno ed un solo punto **y** in [**a,c**]. Ma vale anche il viceversa: ogni volta che si sceglie un **y** in [**a,c**], la stessa proporzione determina uno ed un solo **x** in [**a,b**].

Similmente, la relazione $\mathbf{5y = 12x}$ permette di ricavare

$$x = \frac{5}{12}y \qquad e \qquad y = \frac{12}{5}x$$

dalla prima delle quali per ogni numero razionale **y** tra **0** e **12** se ne ottiene uno tra **0** e **5**, mentre dalla seconda per ogni razionale **x** tra **0** e **5** se ne ottiene uno tra **0** e **12**.

Pertanto, anche se ci sembra un paradosso, non possiamo dire che i punti dell'intervallo [**a,b**] sono di meno di quelli di [**a,c**], come non possiamo dire che numeri razionali tra **0** e **5** sono meno dei razionali tra **0** e **12**.

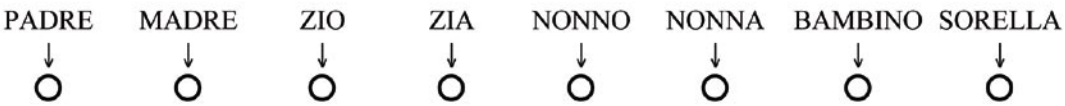
3. La corrispondenza biunivoca come strumento di confronto

Chi riuscì a far chiarezza su questioni come quelle sopra esposte, fu Georg Cantor (1845-1918).

Nato a Pietroburgo da padre tedesco, studiò a Zurigo e Berlino e nella sua vita non ebbe molta fortuna. I suoi risultati furono fortemente criticati soprattutto da colui che era stato il suo maestro, Leopold Kronecker, cosa che gli provocò profonde depressioni, tanto che concluse i suoi giorni in una casa per malati di mente.

Oggi gli si riconoscono quegli onori che non ebbe in vita, perché è universalmente riconosciuto come il fondatore della teoria degli insiemi, come colui che è riuscito a dar dignità nella matematica all'infinito attuale, «aprendoci le porte – come diceva Hilbert – sul paradiso».

Attraverso il concetto di corrispondenza biunivoca egli ha dato un nuovo significato al concetto di numero naturale. Supponiamo che ad un bambino in età prescolare venga chiesto di apparecchiare la tavola per la sua famiglia composta da papà, mamma, zio, zia, nonno, nonna, il bambino stesso, una sorella; quindi 8 persone in tutto. Magari il bambino non sa ancora contare, ma è semplice per lui capire che deve fare in modo che sulla tavola ogni persona abbia il suo piatto, perché non è educato che due persone mangino nello stesso piatto, ma non deve nemmeno accadere che sul tavolo restino piatti che non sono per nessuno.



Facendo in modo che persone distinte abbiano piatti distinti e che non restino piatti anonimi sul tavolo, il bambino realizza una corrispondenza iniettiva e suriettiva, cioè una corrispondenza biunivoca tra la sua famiglia e l'insieme dei piatti, ma nello stesso tempo conta fino a 8, coglie l'essenza del numero 8 come qualcosa di comune ai componenti della sua famiglia ed alla totalità dei piatti messi sul tavolo.

Analogamente possiamo chiederci: cos'è il numero 4? È quel qualcosa, quell'entità astratta che nasce dal fatto che si possono porre in corrispondenza biunivoca le stagioni dell'anno coi lati di un quadrato, con le braccia di una croce, coi punti cardinali, con le dita di una mano una volta escluso il pollice, con l'insieme della lettere {x, y, z, t}, … Il 4 è quel qualcosa che accomuna, in termini matematici «la classe di equivalenza» di tutti gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con, ad esempio, l'insieme delle stagioni dell'anno.

La corrispondenza biunivoca, detta anche 'uno ad uno', è quindi lo strumento principe, il 'metro' che Cantor scelse per stabilire se un insieme è o no numeroso come un altro.

Gli schemi sottostanti mostrano che l'insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza 'uno ad uno' con quello dei quadrati perfetti, e così pure con l'insieme dei numeri pari o l'insieme dei dispari:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**…**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**n**	**…**
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**…**	**2n**	**…**
1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**…**	**2n-1**	**…**

Pertanto l'insieme dei numeri naturali è 'numeroso' come quello dei quadrati perfetti, o come quello dei numeri pari o dei numeri dispari: sono tutti quanti insiemi *equipotenti.* Cantor infatti diceva che due insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca hanno la stessa *cardinalità* o anche la stessa *potenza*, cioè *equipotenti*. Nel caso poi che l'insieme A sia finito e costituito da *n* oggetti, la sua *cardinalità* o *potenza* sarà indicata con $|A| = n$.

È il concetto di cardinalità che permette di dare una risposta al paradosso individuato da Galileo.

Supponiamo che A sia un insieme e B un suo sottinsieme proprio e non vuoto. Se A è finito con cardinalità *n*, allora la cardinalità di B è certamente minore di *n:*

$$\left.\begin{array}{r} |A| = n \\ B \subseteq A, \quad B \neq A \end{array}\right\} \Rightarrow |B| < n\,;$$

cioè nel caso di insiemi finiti, passando a sottinsiemi propri la cardinalità diminuisce, cosa che in generale non è vera per insiemi infiniti. Infatti gli insiemi **N** dei naturali, **P** dei pari, **D** dei dispari, **Quadr** dei quadrati perfetti sono tutti equipotenti, anche se si ha

$$\mathbf{N} \supset \mathbf{P} \qquad \mathbf{N} \supset \mathbf{D} \qquad \mathbf{N} \supset \mathbf{Quadr}$$

Analogamente, nei casi trattati da Bolzano, gli intervalli [**a,b**] e [**a,c**] sono equipotenti, come sono equipotenti l'insieme **Q**[**0,5**] dei numeri razionali tra **0** e **5** e **Q**[**0,12**]**,** insieme dei numeri razionali tra **0** e **12**, anche se si ha

$[a,b] \subset [a,c]$ $\quad\quad\quad\quad$ $Q[0,5] \subset Q[0,12]$.

In conclusione, 'essere parte propria di…' (o 'essere sottoinsieme proprio di …') non vuol necessariamente dire 'esser meno numeroso di …', ma vale solo per gli insiemi finiti, mentre un insieme infinito può esser posto in corrispondenza biunivoca (1 a 1) con una sua parte propria. Anzi, questa è una delle caratteristiche fondamentali di un insieme infinito, tanto che può essere assunta a definizione di insieme infinito.

4. L'infinito numerabile

Un insieme A infinito che possa essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme **N** dei numeri naturali, è stato definito da Cantor *numerabile* o con la potenza $\aleph_0$ (si legge 'alef-zero', dove alef è la prima lettera dell'alfabeto ebraico). Cioè, A è numerabile se esiste almeno un modo per associare a ogni numero naturale n un elemento a_n di A, cosicché gli elementi di A vengano etichettati dai numeri naturali in modo che l'ultimo rigo dello schema sottostante contenga tutti gli elementi di A (applicazione suriettiva) e senza ripetizioni (applicazione iniettiva)

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

In breve possiamo dire che A è numerabile se e solo se si possono disporre i suoi elementi in fila indiana senza tralasciarne alcuno e senza ripeterne alcuno.

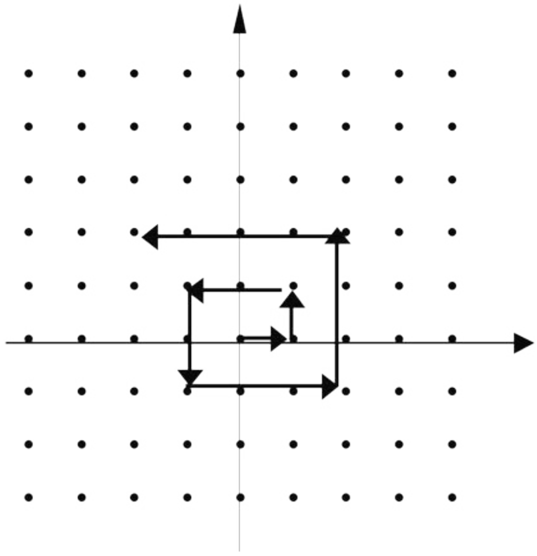
Pertanto i naturali, i pari, i dispari, i quadrati perfetti sono tutti insiemi numerabili:

N	**1, 2, 3, 4, 5, … , n, …**
P	**2, 4, 6, 8, 10, … , 2n, …**
D	**1, 3, 5, 7, 9, … , 2n-1, …**
Quadr	**1, 4, 9, 16, 25, …, n^2, …**

Ma è numerabile anche l'insieme **Z** degli interi: basta disporre in una prima riga lo zero e gli interi positivi, sotto ad ognuno di questi il proprio opposto e poi costruire una fila indiana secondo il percorso indicato dalle frecce:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \rightarrow & +1 & & +2 & & +3 & & +4 & & +5 & & \dots \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ & & -1 & & -2 & & -3 & & -4 & & -5 & & \dots \end{array}$$

Se i punti dello schema seguente indicano i punti del piano cartesiano a coordinate intere, anche questi possono essere posti in fila indiana, ad esempio secondo l'ordine con cui si incontrano a partire dall'origine degli assi nel cammino indicato dalle frecce, anche se non è certo l'unico modo.



Consideriamo poi l'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali disposte come nello schema sottostante secondo infinite righe in ognuna della quali ci sono infinite colonne.

(1,1),	**(1,2),**	**(1,3),**	**(1,4),**	**(1,5),**	**…**	**…**
(2,1),	**(2,2),**	**(2,3),**	**(2,4),**	**(2,5),**	**…**	**…**
(3,1),	**(3,2),**	**(3,3),**	**(3,4),**	**(3,5),**	**…**	**…**
(4,1),	**(4,2),**	**(4,3),**	**(4,4),**	**(4,5),**	**…**	**…**
(5,1),	**(5,2),**	**(5,3),**	**(5,4),**	**(5,5),**	**…**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

Le coppie possono essere ridisposte in un'unica fila indiana secondo l'ordine con cui esse si incontrano percorrendo le frecce dalla coda alla punta, a partire da quella che passa per **(1, 1)** e poi scendendo via via secondo frecce parallele. Il procedimento, ideato dallo stesso Cantor e detto *diagonale,* permette poi di dimostrare che un'infinità numerabile di infinità numerabili è ancora un'infinità numerabile, qualora si pensi che ogni riga sia costituita da una generica fila indiana.

Se riguardiamo ogni coppia **(m, n)** come la frazione $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$, ne deduciamo che l'insieme delle frazioni è numerabile. Supponiamo ora di scorrere in ordine questa fila indiana con tutte le frazioni, muniti di una gomma. Ogni volta che incontriamo una frazione equivalente ad una già incontrata in precedenza, la cancelliamo. Ci resterà ancora una fila indiana di frazioni ognuna delle quali rappresenterà un diverso numero razionale positivo mentre ogni numero razionale positivo è rappresentato da una di esse. Quindi l'insieme $\mathbf{Q}^+$ dei numeri razionali positivi è numerabile. Ma allora anche l'insieme dei razionali $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{ \mathbf{0} \}$ è numerabile; basta ripetere un procedimento analogo a quello usato per l'insieme **Z**

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \rightarrow & +p/q, & & +r/s, & & +m/n, & & +t/s, & & \dots & \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow \\ & & -p/q, & & -r/s, & & -m/n, & & -t/s, & & \dots & \end{array}$$

Il risultato è piuttosto sorprendente: è possibile disporre i numeri razionali in un ordine tale che, ad eccezione dello zero – che è il primo della fila – per ogni razionale ce n'è uno immediatamente precedente ed uno immediatamente successivo, mentre sappiamo che sulla retta i numeri razionali sono *densi,* cioè tra due qualunque numeri razionali ve ne sono infiniti. Si tratta però di ordinamenti ben diversi.

A questo punto viene da chiedersi: tutti gli insiemi infiniti sono numerabili? La riposta è no.

5. La potenza del continuo

I numeri reali sono troppi per essere disposti 'in fila indiana' e lo si può provare dimostrando che sono già troppi gli elementi dell'insieme

$$\mathbf{E} = \{ x \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}] : x = \mathbf{0}, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \ldots x_n \ldots, \text{ con } x_i = \mathbf{0} \text{ oppure } x_i = \mathbf{1}, \forall\, \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \mathbf{n}, \ldots \}.$$

Appartengono ad **E** ad esempio i numeri: **0, 01100101; 0,100100100 ; 0,1111….**

Per comodità pensiamo che le cifre decimali di ogni elemento di **E** siano infinite e – qualora non lo fossero – poniamo degli zeri in coda.

Ragioniamo per assurdo, supponendo che **E** sia numerabile; ciò significa che gli elementi di **E** si possono disporre in fila indiana, secondo lo schema sottostante, in modo che la fila indiana contenga tutti gli elementi di **E** e senza ripetizioni:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & 0,a_1\; a_2\; a_3\; a_4\; a_5\ldots\ldots \\ 2 & \rightarrow & 0,b_1\; b_2\; b_3\; b_4\; b_5\ldots\ldots \\ 3 & \rightarrow & 0,c_1\; c_2\; c_3\; c_4\; c_5\ldots\ldots \\ 4 & \rightarrow & 0,d_1\; d_2\; d_3\; d_4\; d_5\ldots\ldots \\ \ldots & \rightarrow & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mediante le cifre decimali disposte lungo la freccia, possiamo costruire il numero

$$y = \mathbf{0}, y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 \ldots y_n \ldots,$$

con :

$$y_1 = 0, \text{ se } a_1 = 1 \quad \text{ma} \quad y_1 = 1, \text{ se } a_1 = 0 ;$$

$$y_2 = 0, \text{ se } b_2 = 1 \quad \text{ma} \quad y_2 = 1, \text{ se } b_2 = 0 ;$$

$$y_3 = 0, \text{ se } c_3 = 1 \quad \text{ma} \quad y_3 = 1, \text{ se } c_3 = 0 ;$$

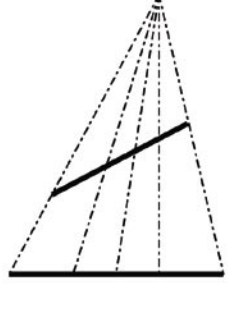
$$y_4 = 0, \text{ se } d_4 = 1 \quad \text{ma} \quad y_4 = 1, \text{ se } d_4 = 0 ;$$

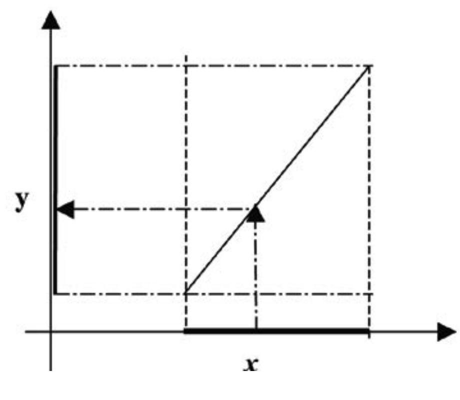
e così via.

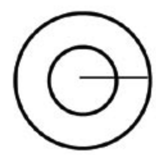
Il nuovo numero y è un elemento di **E**, perché le sue cifre decimali sono solo **0** oppure **1,** ma è diverso dal primo elemento di **E** nella fila indiana, perché ne differisce per la prima cifra decimale; è diverso dal secondo numero, perché ne differisce per la seconda cifra decimale; è diverso dal terzo, perché ne differisce per la terza cifra decimale; e così via. Essendo diverso da tutti gli elementi di **E** della fila indiana, non potrà stare in questa; ma ciò è assurdo, perché avevamo supposto che la fila indiana contenesse tutti gli elementi di **E** e $y \in$ **E.** L'assurdo deriva dall'aver supposto che **E** sia numerabile.

Siamo quindi di fronte ad un nuovo tipo di infinito, *maggiore* rispetto al numerabile, risultato che scardina la concezione galileiana secondo cui «gli attributi di maggiore e minore non aver luogo ne' gl'infiniti». L'insieme **E** può essere riguardato anche in un altro modo: i suoi elementi non sono altro che tutti e soli i numeri reali dell'intervallo [**0,1**] scritti in numerazione binaria. Quindi **E** è equipotente all'intervallo [**0,1**], cosa che ha indotto Cantor a definire tale cardinalità *potenza **c*** o *del continuo.*

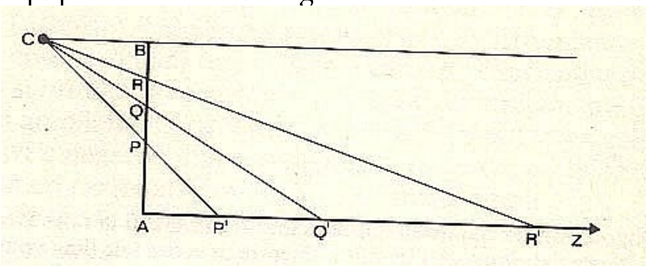
È poi relativamente semplice porre in corrispondenza biunivoca l'intervallo [**0,1**] con un generico intervallo [**a,b**] e le immagini sottostanti mostrano come si possano porre in corrispondenza 'uno-a-uno' due qualunque segmenti, proiettando i punti dell'uno su quelli dell'altro a partire dall'intersezione delle semirette passanti per i loro estremi, oppure sistemando un segmento sull'asse delle ascisse, l'altro su quelle delle ordinate e poi associando ad ogni ascissa di un punto del primo segmento l'ordinata del punto immagine sulla diagonale del rettangolo che si proietta, sugli assi, sui due segmenti dati.





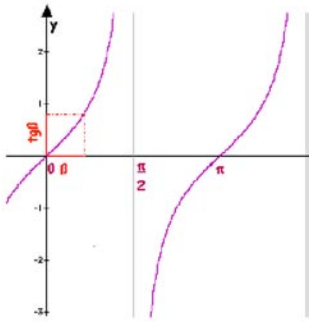


In due circonferenze concentriche, ogni raggio pone in corrispondenza 'uno-a-uno' un punto di una circonferenza con un punto dell'altra, indipendentemente dalle loro lunghezze. Sono equipotenti anche un segmento e una semiretta: il disegno seguente



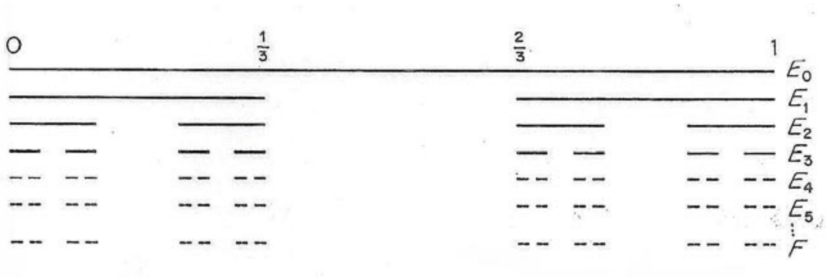
mostra come le semirette uscenti da C permettano di associare ad ogni punto del segmento AB un punto della semiretta semiretta AZ (come ad esempio R e R' oppure Q e Q') rispettando le caratteristiche di iniettività e suriettività.

Se poi associamo ad ogni $\boldsymbol{x} \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ l'elemento $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{tg\,x}$, realizziamo una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ e l'intero asse delle y.



6. La polvere di Cantor

Dato l'intervallo [**0**,**1**], supponiamo di dividerlo in tre parti uguali e poi di cancellare la parte centrale.



Ci restano due intervalli su cui operiamo in modo analogo: dividiamo ognuno di essi in tre parti uguali e poi cancelliamo la parte centrale. Procediamo via via così e ciò che resta al termine del procedimento (che in realtà non termina mai, ma possiamo pensare di giungerne alla fine solo mentalmente) è un insieme detto *polvere di Cantor* o *insieme ternario di Cantor.*

Poniamoci questa prima domanda: quanto misura complessivamente ciò che vado a cancellare dall'intervallo [**0** ,**1**]?

Dopo ***n*** passi, ho cancellato intervalli per una misura totale pari a[4]

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

che al divergere di ***n*** si approssima sempre più ad **1** e quindi, alla fine del processo di cancellazione, avrò eliminato intervalli di misura complessiva **1.** Ma allora la polvere di Cantor, che è ciò che resta dell'intervallo [**0,1**], sarà un insieme di misura **0.**

Poniamoci poi una seconda domanda: quanti sono i punti dell'insieme di Cantor?

Pensiamo di numerare in base 3. Quando da [**0,1**] cancelliamo la parte centrale, eliminiamo tutti i numeri scritti nella forma **0,1…,** mentre manteniamo quelli scritti nella forma **0,0…** e **0,2…**

Al secondo passo cancelliamo tutti quelli della forma **0,01…** e **0,21…,** mentre teniamo tutti quelli della forma **0,00…, 0,02…, 0,20…, 0,22…** Analogamente, al terzo passo eliminiamo tutti i numeri con la terza cifra dopo la virgola uguale ad **1**, mentre teniamo tutti quelli le cui prime tre cifre dopo la virgola sono solo **0** oppure **2.**

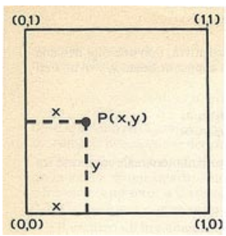
Proseguendo via via così, otteniamo che la polvere di Cantor è costituita da tutti i numeri scritti in base 3 nella forma $\mathbf{0,a_1a_2a_3a_4a_5}$**……** dove ognuno degli infiniti $\mathbf{a_i}$ è **0** oppure **2,** $\forall$ **i** = **1, 2, ... n,…**

Basta scambiare ogni **2** con un **1** per capire che abbiamo un insieme equipotente all'insieme **E** del paragrafo **5** e quindi la polvere di Cantor ha la potenza del continuo, risultato che sembra paradossale, perché si tratta di un insieme di misura nulla e che non contiene alcun segmento, comunque piccolo lo si pensi.

7. Equipotenza anche con dimensione diversa

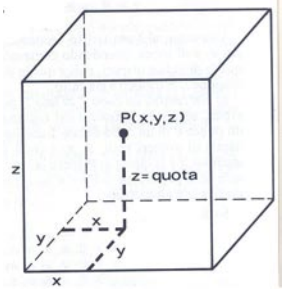
Agli occhi dello stesso Cantor apparve ancor più paradossale il poter dimostrare che i punti del lato di un quadrato (una figura geometrica unidimensionale) sono esattamente tanti quanti i punti dell'intero quadrato (una figura geometrica di dimensione due).

Nel piano cartesiano sia dato il quadrato di lato unitario con vertici in (**0**,**0**), (**1**,**0**), (**1**,**1**), (**0**,**1**).



Si consideri l'applicazione che al generico punto **Q**=(**x***, **0**), che sta sul lato da (**0**, **0**) ad (**1**, **0**) e con ascissa $\mathbf{x^*=0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots}$, associa il punto del quadrato **P**=(**x**, **y**) con $\mathbf{x= 0,a_1a_3a_5a_7a_9\ldots}$ ed $\mathbf{y= 0,a_2a_4a_6a_8\ldots}$

È evidente che a due punti **Q** e **Q'** diversi vengono associati due punti **P** e **P'** diversi**,** mentre a partire da **P**=(**x**, **y**) con **x**= $\mathbf{0,x_1x_2x_3x_4x_5}$**…** ed **y**= $\mathbf{0,y_1y_2y_3y_4y_5}$**…** è possibile ritornare a **Q**=(**x***, **0**) con $\mathbf{x^*=0,x_1y_1x_2y_2x_3\,y_3x_4\,y_4}$**…** Siamo così di fronte ad una corrispondenza biunivoca che prova l'equipotenza tra il lato del quadrato e l'intero quadrato; e non è difficile passare dall'intero quadrato a tutto il piano.Capite le tecniche del gioco, si può ragionare, invece che con un quadrato, con un cubo.



Basta associare a **Q**=(**x***,**0**,**0**), con $\mathbf{x^*=0,a_1a_2a_3a_4a_5}$**…** il punto **P**=(**x**,**y**,**z**) con **x**= $\mathbf{0,a_1a_4a_7a_{10}}$**…**, **y**= $\mathbf{0,a_2a_5a_8a_{11}}$**…** e **z**= $\mathbf{0,a_3a_6a_9a_{12}}$**…** Pertanto si ha equipotenza anche tra il lato di un cubo e l'intero cubo, da cui si può poi passare all'intero spazio.

8. Conclusioni paradossali

Tirando un po' di somme da quanto illustrato negli ultimi paragrafi, possiamo dire che i punti dell'insieme *polvere di Cantor* sono esattamente tanti quali quelli

- di un segmento comunque corto
- di un segmento comunque lungo
- di una retta
- di un quadrato
- del piano
- di un cubo
- dello spazio
- dell'intero universo
- ….

Di fronte a questi risultati Cantor stesso esclamava: «Io lo vedo ma non ci credo!».

«Non ci credo» perché tutto sembra cozzare contro il senso comune, per cui è ampiamente giustificabile la diffidenza nei confronti di tali risultati da parte di contemporanei di Cantor, come Kronecker; ma «lo vedo» perché le tesi sono ottenute mediante la limpidezza ed il rigore del ragionamento matematico.

E a proposito del ragionamento matematico Cantor era solito dire che «l'essenza della matematica è la sua libertà» e che «la matematica nel suo sviluppo è completamente libera e vincolata soltanto all'evidente condizione che i suoi concetti siano in sé non contraddittori e in relazioni fissate mediante definizioni a concetti già esistenti e sicuri».

9. I numeri transfiniti

In analogia al caso degli insiemi finiti, in cui la cardinalità è un numero, Cantor pensò $\aleph_0$, cardinalità di un insieme numerabile, come un numero che chiamò *primo numero transfinito.*

Anche se non riuscì a dimostrarlo, considerò poi ***c***, potenza del continuo, come cardinalità di un insieme infinito immediatamente successivo al numerabile, nel senso che riteneva impossibile l'esistenza di un insieme infinito con potenza maggiore del numerabile e minore di ***c***[5]. In base a ciò, chiamò la potenza del continuo $\aleph_1$ *secondo numero transfinito.* Dimostrò poi che nel passare da un insieme **A** a quello delle sue parti P(**A**) la cardinalità aumenta sempre, anche nel caso non finito e ciò gli permise di costruire una successione di numeri transfiniti:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \aleph_4 < \ldots < \aleph_n < \ldots$$

Negli anni 1895 – 97 mise a punto un'aritmetica dei numeri transfiniti, con regole per sommarli, moltiplicarli, elevarli ad una potenza, come, per esempio:

$$\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 \qquad \aleph_1 \times \aleph_3 = \aleph_3 \qquad 2\aleph_1 = \aleph_1.$$

Accanto a questi numeri transfiniti, detti *cardinali* e ottenuti a partire da insiemi in cui non conta l'ordine degli elementi, Cantor costruì i *numeri transfiniti ordinali,* a partire da insiemi in cui si tiene conto dell'ordine con cui si considerano gli elementi. Come credente ammetteva poi che al di sopra di tutti questi infiniti esistesse un *infinito assoluto* che comprende in sé ogni altro infinito, cioè Dio.

Potremmo chiederci: che senso ha definire questi numeri transfiniti, che non hanno un'utilità pratica? perché stare a costruire regole aritmetiche per operare su di essi? Possiamo però proseguire con un'altra domanda: che senso ha scrivere una poesia, disegnare un quadro, comporre un brano musicale? Questi sono il frutto dell'esternazione dei pensieri dell'autore mediante la sua creatività, così come i numeri transfiniti sono il frutto di un sottile e raffinato ragionamento.

David Hilbert diceva che «l'aritmetica transfinita è il prodotto più stupefacente del pensiero matematico, una delle più belle creazioni dell'attività umana nel campo dell'intelligibile» e di fronte all'esitazione di anime timide, egli esclamava: «Nessuno ci scaccerà mai più dal paradiso che Cantor ha creato per noi».

La libertà della matematica permette di costruire oggetti ideali, che magari sembrano non aver alcun valore se non per il nostro pensiero, anche se poi può accadere che col passar del tempo ciò che sembrava solo astratto trovi applicazioni concrete. È il caso della polvere di Cantor, che oggi è spesso presentato come uno degli esempi fondamentali di frattale, come un oggetto di quella geometria ideata da Mandelbrot solo nel 1975-80 e che da allora si mostra sempre più utile non solo per descrivere la natura, ma per molteplici applicazioni che vanno dalla scenografia cinematografica allo studio del battito cardiaco.

NOTE

[1] Come nell'opera sulla *Quadratura della parabola*, dove dimostra che l'area di un segmento di parabola è i 4/3 di quella del triangolo in esso inscritto calcolando sostanzialmente la somma della serie geometrica di ragione 1/4. Si veda in proposito [11], pp. 32-41.

[2] Cioè i numeri naturali: 1, 2, 3, ….

[3] Da allora se ne sono susseguite diverse edizioni, anche recenti. Si vedano in bibliografia [2] e [1].

[4] Nei calcoli che seguono si usa la formula $\mathbf{1+q+q^2+\ldots q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}}$, valida per ogni $\boldsymbol{q\neq 1}$ e che deriva dall'uguaglianza $\left(1+q+q^2+..q^{n-1}\right)\left(1-q\right)=1-q^n$

[5] La congettura di Cantor fu chiamata 'ipotesi del continuo'. Ancor oggi, dopo oltre un secolo, non trova una risposta definitiva. Si vedano [6] e [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] Bolzano, B., *I paradossi dell'infinito*, Feltrinelli, Milano, 1965.
[2] Bolzano, B., *I paradossi dell'infinito*, a cura di A. Conte, Bollati Boringhieri, Torino, 2003.
[3] Boyer, C.B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1980.
[4] Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Elzeviri, Leida, 1638; Barbera, Firenze, 1898.
[5] Giacomucci, M.C., *L'infinito in matematica*, http://www.vialattea.net/pagine/infinito
[6] Leonesi, S., Toffalori, C., *Il problema del continuo*, Archimede, n. 2, 2003 pp.79-84.
[7] Leonesi, S., Toffalori, C., Tordini, S., La matematica dell'infinito, *Lettera PRISTEM*, 48, 2003, pp. 37-48.
[8] Lombardo Radice, L., *L'infinito*, Ed.Riuniti, Roma, 1981.
[9] Mandelbrot, B., *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione*, Einaudi, Torino, 1987.
[10] Mandelbrot, B., *La geometria frattale della natura*, Theoria, Roma, 1989.
[11] Napolitani, P.D., *Archimede – Alle radici della scienza moderna*, in *I grandi della scienza*, supplemento a «Le Scienze», 22, 2001.
[12] Rucker, R., *La mente e l'infinito*, Muzzio, Padova, 1994.
[13] Russel, B., *Introduzione alla filosofia matematica*, traduzione di L. Pavolini, con uno scritto di P. Odifreddi, Longanesi, Milano, 2004.
[14] Zellini, P., *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano, 1993.