Geometria non euclidea:

un caso esemplare nella storia del pensiero scientifico

Renato Betti

Dipartimento di Matematica 'Francesco Brioschi', Politecnico di Milano

Introduzione

La vicenda della geometria non euclidea si sviluppa lungo un arco di più di 2000 anni e ha uno svolgimento in qualche modo esemplare, dalla sua origine, fra il III e il IV secolo a.C. con la grande opera di Euclide *Gli Elementi*, fino alla soluzione, che si risolve semplicemente in un diverso punto di vista dal quale considerare il problema e che ha luogo nella prima metà dell'Ottocento. Una soluzione semplice per modo di dire, perché in realtà, come spesso accade, la difficoltà è proprio quella di assumere un nuovo punto di vista.

Già alla fine del Settecento, la conclusione è certamente nell'aria, perché spunta da più parti distinte e non collegate. Coglie tuttavia impreparata la comunità matematica e risulterà addirittura traumatica per la cultura scientifica. Per quale motivo? Perché è una soluzione originale, non convenzionale. Non si tratta di un risultato tecnico, ad esempio della dimostrazione di un teorema, come si è abituati da sempre in matematica: ora si prende coscienza del fatto che, oltre alla geometria formalizzata da Euclide, possono esistere altre geometrie, che per questo saranno dette 'non euclidee'– la felice terminologia è in una lettera di Gauss del 1824. Ciò che risulta difficile e addirittura traumatico per la cultura del tempo è accettare e prendere sul serio il nuovo punto di vista, vale a dire che possano esistere molte geometrie.

Questo è il fatto. Ma non c'è una sola geometria – domandiamo anche noi – non è unico lo spazio da formalizzare? Ormai, dopo questi sviluppi, è riconosciuto e accettato che l'idea di 'spazio' si liberi da una forma di rigidità e di ingenuità, dettate dall'esigenza di una corrispondenza immediata fra geometria e mondo fisico. Nella concezione che viene dal periodo classico, la geometria deve descrivere in veste idealizzata le proprietà delle forme che percepiamo con i sensi: liberandola da una troppo stretta corrispondenza con la realtà sensibile, la si rende disponibile alla rappresentazione di altri numerosi problemi, che hanno tipicamente natura matematica. Così nasce l'idea di 'spazio matematico'.

Forse questo è il maggior contributo dei fondatori della geometria non euclidea: il «relativismo della nozione di spazio». Si parla di questo. Ma per ora è bene introdurre il problema delle parallele ed accennare al suo svolgimento millenario.

1. Il problema delle parallele

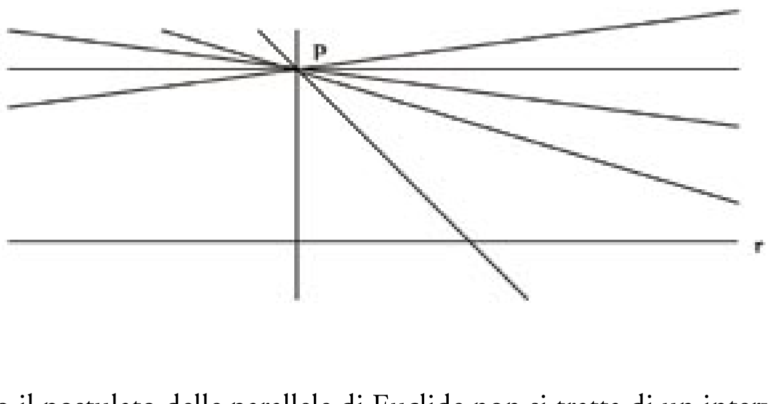
1.1

Vale la pena di ricordare la problematica. Siamo all'inizio della geometria, quando la materia nasce come scienza razionale, fra V e III secolo a.C. e, in maniera intuitiva, si pensa ad un'unica geometria di un unico spazio – quello nel quale viviamo. Questa geometria, che è dunque considerata come l'unica, vera geometria del nostro mondo, viene descritta in termini assiomatici in un'opera che rimarrà famosa: gli *Elementi* di Euclide.

Nel caso del piano, Euclide fissa cinque postulati – vale a dire cinque proprietà che sono assunte come vere senza bisogno di dimostrazione – e, a partire da questi postulati, dimostra in maniera rigorosa le altre proprietà delle figure.

Il metodo assiomatico, che ha fatto la sua prima comparsa negli *Elementi*, desta subito grande ammirazione e verrà considerato per due millenni il «metodo deduttivo» per eccellenza. Ma, subito dopo la comparsa degli *Elementi* di Euclide, la comunità scientifica – matematici, fisici, filosofi, naturalisti e anche musicisti – solleva alcune perplessità sul V ed ultimo postulato della geometria piana – il cosiddetto «postulato delle parallele».

Ecco la problematica di questo postulato, espressa in modo diverso ma equivalente a quella data da Euclide: in un piano sono dati un punto P e una retta r che non passa per il punto P; si consideri il fascio delle rette passanti per P e le intersezioni con la retta r. Facendo ruotare la retta nel fascio, l'intersezione si sposta da una parte lungo la r finché, continuando la rotazione, scompare da quella parte e ricompare dall'altra. La domanda che sorge in modo spontaneo è la seguente: quanto è grande l'intervallo delle rette appartenenti al dato fascio per P che non incontrano più la r da una parte ma non la incontrano ancora dall'altra?



Secondo il postulato delle parallele di Euclide non si tratta di un intervallo. C'è un unico caso: esiste un'unica parallela per P a r vale a dire, esiste un'unica retta che non ha intersezioni con la retta r. In questo consiste il postulato.

1.2

Perché questo enunciato ha sollevato problemi fin dal suo sorgere? Non si tratta certo di una proprietà particolarmente semplice da enunciare – almeno se la si confronta con gli altri postulati, a esempio con il primo postulato della geometria di Euclide:

per due punti dati passa una sola retta

Ma non è neanche troppo complicata. Non è questo il motivo. Il fatto è che le manca l'evidenza inarrestabile degli altri postulati, l'evidenza che in ogni caso si richiede alle proprietà da assumere a priori, senza dimostrazione.

Attenzione: la proprietà espressa dal postulato non viene considerata falsa. Si dimostra facilmente, senza far ricorso al postulato delle parallele, che basta prendere la perpendicolare della perpendicolare alla retta data per avere una parallela. La questione riguarda l'unicità della parallela, cioè il fatto che non ne esistano altre: come essere sicuri a priori, senza fare una dimostrazione, che due rette si intersecano o prima o poi, pur senza vederle mai intersecare?

Una simile certezza obbliga a considerare le rette nella loro interezza, come infinità in atto, mentre nella concezione classica – e forse anche nella nostra maniera di capire questi fenomeni geometrici – la retta è da considerare come un segmento che si può estendere quanto si voglia, ma è pur sempre un infinito in potenza: la proprietà che si può controllare è che le rette non si intersechino in una loro estensione, ma nulla si può dire a priori, cioè senza una dimostrazione, che riguardi l'intero loro percorso. Per affermare una proprietà che coinvolga tutta la loro estensione, è necessario avere una dimostrazione.

Per questa insoddisfazione nei confronti del postulato delle parallele, fin dai tempi più antichi, gli scienziati – che pure erano grandemente ammirati dall'opera di Euclide e ritenevano la proprietà vera e necessaria – cominciano a pensare che si tratti di un teorema, cioè di una proprietà che si può dimostrare a partire dai precedenti quattro postulati: in questo modo, si pensa, farà parte del corpo geometrico senza che la si debba assumere senza dimostrazione.

1.3

Tuttavia, nel corso di due millenni, nonostante numerosi e spesso acuti tentativi, non si riesce mai a dimostrarlo. O meglio, di volta in volta si trovano numerose dimostrazioni ma poi o prima si scopre che sono basate tutte, implicitamente, su assunzioni non dimostrate, che sono quindi equivalenti al postulato delle parallele.

Vengono trovate numerose proprietà di questo tipo. Ad esempio: una proprietà che equivale al postulato delle parallele è che la somma degli angoli interni di un triangolo sia uguale a 180 gradi. Oppure: dire che due rette parallele sono equidistanti[1]. Oppure anche: che esistano due triangoli simili, o che una trasversale che taglia una di due rette parallele tagli anche la seconda.

Alla fine del '700, l'impossibilità a dimostrare il postulato delle parallele viene considerato in maniera ossessiva dalla comunità scientifica. Nel 1759, osserva d'Alembert, che aveva redatto la voce *Geometria* per la grande Enciclopedia francese:

> …la definizione e le proprietà della retta e quella delle parallele sono lo scoglio

e per così dire lo scandalo degli elementi della geometria.

Oggi, duemila anni dopo e col senno di poi, noi sappiamo che una dimostrazione di questo tipo non si poteva trovare. Sappiamo che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri perché si sono trovate alcune superfici sulle quali, interpretando in maniera opportuna i termini fondamentali – punto, retta, intersezione, parallelismo ecc. – valgono tutti i postulati di Euclide tranne quello delle parallele: se il postulato delle parallele fosse una conseguenza dei precedenti quattro postulati, dovrebbe valere automaticamente ogni volta che valgono questi. Come si dice, esistono dei modelli di geometria non euclidea.

Il diverso punto di vista, quello delle geometrie non euclidee, consiste nel negare il postulato delle parallele e dunque nel negare l'esistenza oppure negare l'unicità della parallela tracciata da *P* ad *r*: per il punto *P* non esistono rette che non abbiano intersezione con la retta data, cioè che le sono parallele (e in questo caso si parla di «geometria ellittica») oppure ne esiste più di una (e in questo caso si parla di «geometria iperbolica»).

Come sono contro-intuitive entrambe le proprietà! E il problema delle parallele si trasforma di conseguenza: sarà consistente la teoria che si ottiene assumendo l'uno o l'altro di questi postulati non euclidei? Oppure, si potranno trovare conseguenze contrarie l'una all'altra e quindi si può concludere che la teoria conduce ad un assurdo? Che è inconsistente?

Quando verrà trovato un «modello» per le rispettive teorie (Beltrami nel 1868, Riemann in un lavoro del 1854 ma pubblicato nel 1866)[2] e viene risolto di conseguenza il problema della consistenza logica della teoria, le geometrie non euclidee ricevono la stessa dignità logica, se non psicologica, che aveva quella euclidea.

1.4

Sembra tutto molto facile: se si assume un postulato si ottiene una geometria, se lo si cambia, si ottiene una geometria diversa. In realtà sappiamo che l'autorità e il prestigio che l'opera di Euclide manteneva ancora nell'800 sconsigliano di rivelare la scoperta che il problema delle parallele è solo una questione di ipotesi. Bisogna aspettare tempi più maturi. Bisogna aspettare che le intuizioni si fissino in regole matematiche precise, almeno secondo Gauss (1777-1855), il maggiore dei matematici della prima metà dell'800, il riconosciuto "princeps mathematicorum" della comunità scientifica, che ripone letteralmente in un cassetto le proprie considerazioni relative al postulato delle parallele e, così facendo, ripone anche i propri legittimi dubbi e le proprie considerazioni sulla natura dello spazio.

Così il merito della scoperta tocca a matematici più giovani e meno famosi – Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) in Russia e János Bolyai (1802-1860) in Ungheria – che lavoravano nello stesso periodo e in maniera molto simile, ma indipendentemente l'uno dall'altro. Forse il merito della scoperta spetta a loro perché questi giovani matematici non avevano una reputazione da difendere come i grandi e famosi scienziati e per questo erano meno sensibili alla responsabilità di mettere in discussione l'autorità di Euclide.

E quella di mettere in discussione la geometria di Euclide non era una questione di poco conto. Di fatto, la geometria euclidea ha sempre avuto nei tempi un doppio ruolo per la cultura, e non solo per la cultura scientifica: da una parte c'era il ruolo tecnico – quello che tutti si aspettano dalla geometria: studiare le proprietà delle figure – ma dall'altro assolveva anche a una funzione metodologica: quella di fissare i canoni del rigore scientifico – disciplinare il ragionamento ed educare le menti alla deduzione rigorosa[3].

Così, una critica al postulato delle parallele metteva in discussione tutto il complesso della scienza conosciuta ed accettata fino a quel momento, perché la colpiva sia nel merito delle proprietà da dimostrare che, si pensava, nel metodo scientifico della deduzione.

1.5

Bisogna anche considerare che sulla geometria euclidea si basava tutta la fisica moderna, quella che per noi è classica, ma che allora era relativamente recente, la fisica di Galileo e di Newton: la struttura dello spazio euclideo, con le sue rette parallele che proseguono all'infinito mantenendosi sempre equidistanti, era senz'altro quella più idonea a descrivere la legge di inerzia, in cui i corpi mantengono indefinitamente il proprio stato di moto rettilineo uniforme.

Che senso ha che possano esistere molti spazi, con proprietà completamente diverse riguardo alle figure che in essi si possono tracciare? Come cambiano le leggi della fisica? Insomma, il vero problema è quello di sapere che cos'è lo spazio.

Ci si rende conto a fatica – di fatto è stata una grande conquista concettuale – che lo spazio non è l'ambiente che ingenuamente si percepisce con i sensi. Una specie di recipiente nel quale avvengono i fenomeni fisici ma che sostanzialmente è indifferente rispetto a questi fenomeni. Lo spazio ora può essere anche una costruzione intellettuale e può anche essere strutturalmente modificato dai fenomeni che in esso hanno luogo.

2. Geometria e spazio

2.1

Così, quella di "spazio" è una nozione relativa. In che cosa consiste il relativismo di questa nozione e come si manifesta? Almeno in tre aspetti.

Primo. È stato autorevolmente osservato che:

La geometria euclidea termina quando cominciano 'le geometrie'

(o meglio, non termina, ma continua insieme alle altre).

Infatti, fra Sette e Ottocento, diversi studi di carattere geometrico – seppure non inquadrati nella ufficiale geometria euclidea – nascono in maniera frammentaria, indipendenti l'uno dall'altro e dal problema delle parallele, originati da autonome problematiche. Si tratta ad esempio della «geometria descrittiva», che risponde al problema seguente: come rappresentare le figure solide, tridimensionali, su un piano, che di dimensioni ne ha due? In seguito della «geometria proiettiva»: quali proprietà delle figure rimangono invariate con le operazioni di proiezione da un punto e sezione con un piano? Anche la scoperta delle geometrie non euclidee fornisce nuovi esempi e nuovi spazi, dotati di proprietà radicalmente diverse da quello tradizionale euclideo.

Inoltre si presentano altre esperienze geometriche, originate dalla necessità di considerare una superficie come spazio in sé, indipendente dalla sua immersione in un altro ambiente fisico, euclideo o non euclideo che sia. Quelle che importano sono le proprietà che si possono dimostrare senza uscire dalla superficie: nasce così la «geometria intrinseca» delle superfici, da parte di Gauss – poi generalizzata da Riemann in geometria intrinseca delle varietà a un numero qualsiasi di dimensioni – come esigenza di rappresentazione territoriale conseguente agli studi di geodesia condotti dallo stesso Gauss.

Con queste esperienze, e con le teorie che vengono di volta in volta avanzate, si consolida l'idea che esistano più spazi, ciascuno relativo a problemi di natura diversa.

2.2

Un secondo argomento è il seguente: accanto allo 'spazio' ed alle 'figure' in esso contenute si presentano esplicitamente i 'problemi', che spesso sono all'origine delle nuove nozioni. La coppia 'figura – problema' dà luogo a quello che secondo me si deve chiamare «il fenomeno geometrico». Il secondo aspetto importante del relativismo della nozione di spazio è il rovesciamento del rapporto di priorità fra lo spazio e i suoi fenomeni geometrici. Cambia l'ordine di importanza:

Lo spazio matematico diventa lo spazio dei fenomeni geometrici.

Se in precedenza lo spazio era l'ambiente di studio dei "fenomeni geometrici", relativi a curve, superfici etc. da ora il fenomeno diventa l'ente primitivo, attorno al quale si costruisce lo spazio più opportuno per descriverlo e spiegarne le proprietà.

Un esempio evidente di questo rovesciamento di priorità è dato dalla nozione di «dimensione»: è noto che alcuni matematici, in particolare Hermann Grassmann (1809-1877) nella sua *Teoria dell'estensione* (pubblicata nel 1844), intraprendono uno studio sistematico degli spazi di dimensione arbitraria, e della relativa geometria, nel desiderio di trattare la nozione di spazio in maniera puramente intellettuale, senza limitare le considerazioni a quello che viene percepito con i sensi: la dimensione è il numero di parametri liberi del fenomeno sotto esame e lo spazio, per così dire, 'si adatta' con la sua generalizzazione al problema da studiare.

2.3

Ecco un terzo aspetto del relativismo della nozione di spazio. A metà dell'800 il panorama della geometria è composito e frammentato, pieno di spinte ma privo di un principio unitario. I vari settori di studio che si ispirano o si riconducono alla geometria, le esperienze e le idee che emergono, hanno una relativa autonomia concettuale ma sono legati soltanto dalla terminologia alla vecchia geometria, cioè dal fatto che in ogni caso si parla di punti, rette, curve etc. Per il resto, sono scarsamente collegati fra di loro. Oltre a contribuire con i propri originali spazi a questo panorama geometrico, la geometria non euclidea fornirà un principio unitario a tutta la materia. Questo avviene quando abbandona il proprio aspetto elementare di studio delle immediate conseguenze del postulato che regola il parallelismo di rette. Allora si inserisce perfettamente, completandolo e unificandolo, nel processo di formazione delle nuove geometrie e dei nuovi spazi. In sintesi:

La geometria non euclidea è il 'tassello' mancante di una teoria geometrica unitaria.

Innanzi tutto, si tratta della geometria di una superficie curva, e quindi va compresa e studiata nell'ambito della geometria intrinseca delle varietà inaugurata da Gauss. In questo contesto è suscettibile di una «interpretazione differenziale». Poi, è in tutto e per tutto una geometria, quindi si lega al punto di vista di un gruppo di trasformazioni che agiscono sui suoi enti, seguendo le idee che, in questo settore, stava sviluppando Felix Klein (1849-1924): dunque si presta anche ad una «interpretazione gruppale». Ma di più, come le altre geometrie, anche per le geometrie non euclidee si afferma la subordinazione della metrica al punto di vista proiettivo:

La geometria proiettiva è tutta la geometria

esclama in questo periodo Arthur Cayley (1821-1895), il cui lavoro permette di formalizzare la differenza fra le geometrie con l'uso di differenti coniche. E questa pervasività e unità della geometria sono fornite dalla comprensione del ruolo delle geometrie non euclidee.

Insomma: la geometria non euclidea, allo stesso tempo, completa una nozione generale di geometria e le fornisce un nuovo statuto e nuove direzioni di studio, il cui programma è bene indicato da Felix Klein [4].

3. La natura dello spazio

3.1

Nel tempo, molti sintomi della presa di coscienza che il problema delle parallele riguarda la natura dello spazio e conducono a «nuove geometrie» sorgono in maniera indipendente. Fra i tanti, un precursore importante è il matematico svizzero Johann Heinrich Lambert (1728-1777), il quale era particolarmente interessato alle premesse di ogni materia, piuttosto che ai suoi fondamenti. Nel corso delle sue ricerche fa due osservazioni importanti che prefigurano acutamente i punti nodali della geometria non euclidea di tipo iperbolico e che sono del tutto estranee all'intuizione euclidea:

> Dovrei almeno concludere che questa ipotesi [dell'angolo acuto, cioè della geometria iperbolica] vale su una sfera di raggio immaginario

intuendo che in questo caso la trigonometria è la stessa della sfera, pur di cambiare r in ri (dove i è l'unità immaginaria). E anche:

> La più sorprendente conseguenza è che sotto questa ipotesi si avrebbe una misura assoluta di lunghezza per ogni retta, di area per ogni superficie e di

volume per ogni spazio fisico. [5]

La misura assoluta di lunghezza corrisponde a un segmento costante e nasce da una corrispondenza biunivoca fra angoli e segmenti che, almeno in apparenza, violava il "principio di omogeneità" secondo il quale non si può confrontare la "grandezza assoluta" di un angolo con quella "lineare" di un segmento. Ma, dal punto di vista formale, si capisce che la misura assoluta non fornisce che un parametro dal quale dipende la nuova geometria, allo stesso modo con cui la geometria sferica dipende dal raggio della sfera. Questa misura è il "raggio di curvatura" della pseudosfera di Beltrami, che è storicamente il primo modello di geometria iperbolica. Inaspettatamente è un numero complesso, vale a dire la curvatura del piano iperbolico è negativa.

3.2

Di fatto, la riflessione matematica sulla natura dello spazio prende piede fra Sette e Ottocento, proprio quando si comincia a intuire quale soluzione vada data al problema delle parallele.

Questa riflessione era naturalmente da sempre presente in fisica e filosofia. Riguardava la essenza qualitativa dello spazio (di cosa si compone e di quali proprietà gode: è corpuscolare o ininterrotto, è omogeneo oppure no, isotropo o anisotropo?) e gli aspetti quantitativi (qual è la sua estensione, è finito o infinito, può essere «vuoto»?), con contrapposte concezioni: da una parte lo spazio è considerato come una specie di contenitore in grado di essere riempito con gli oggetti più diversi, rispetto ai quali è sempre ininfluente, dall'altra – in contrasto con questa visione, risalente al primo atomismo greco, c'è quella, psicologicamente se non storicamente precedente, dello spazio come luogo dei corpi (topos): lo spazio è una maniera per collegare sistematicamente i diversi corpi e porli in relazione.

Una simile visione si afferma anche in matematica sulla spinta delle geometrie non euclidee: lo spazio è spesso determinato dai fenomeni, anche da quelli geometrici, anziché il contrario.

3.3

Una delle prime osservazioni precise – 'da matematico' – sulla natura dello spazio forse è da attribuire a Lobačevskij. Qual è la sua concezione?

Fino dal primo scritto (un manuale di geometria dedicato agli studenti universitari, redatto nel 1823 ma mai pubblicato durante la sua vita) si preoccupa di esporre le proprie concezioni sugli oggetti di base della geometria e sui caratteri che li distinguono: i dati primitivi sono i «corpi», la cui proprietà fondamentale è data dalla loro «estensione» e la cui unica relazione di rilevanza geometrica è il «contatto».

Anche nelle opere successive, l'evoluzione dei concetti mostra chiaramente che secondo Lobačevskij i corpi materiali sono parti di un tutto che non ha bisogno di essere separatamente definito. È questo 'tutto', non definito in sé ma attraverso i corpi, che costituisce lo spazio.

Lo spazio in sé, separatamente considerato, per noi non esiste. Detto ciò,

> nessuna contraddizione può presentarsi nella nostra mente ammettendo che certe forze in natura seguano una loro particolare geometria e altre, un'altra[6].

3.4

L'intreccio che la geometria non euclidea determina con la fisica è profondo, e rilevato già nella prima opera di Lobačevskij:

> Rimane qui da studiare il tipo di cambiamento che viene determinato dall'introduzione della geometria immaginaria nella meccanica, se non si trovino qui dei concetti e indubbi sulla natura delle cose che ci obbligano a limitare o addirittura non ammettere la dipendenza dei segmenti dagli angoli. Tuttavia, si può prevedere che i cambiamenti in meccanica dovuti ai nuovi principi della geometria saranno dello stesso genere di quelli mostrati dal signor Laplace (*Mécanique Céleste* t.I, libro I, cap. II) supponendo possibile ogni dipendenza della velocità dalla forza o – più propriamente – supponendo che le forze, misurate sempre da velocità, siano soggette ad altre leggi oltre la loro composizione[7].

> Non si può dubitare di un'unica cosa, che le forze producano da sé i movimenti, le velocità, il tempo, le masse e perfino le distanze e gli angoli [8].

3.5

L'impatto della scoperta delle geometrie non euclidee ha indebolito la tradizionale fiducia nella matematica e nella fisica ma aperto nuove prospettive in tutti i settori.

> … se Dio esiste, e se in realtà ha creato la terra, l'ha creata, come ci è perfettamente noto, secondo la geometria euclidea, e ha creato lo spirito umano dandogli soltanto la nozione delle tre dimensioni dello spazio. Nondimeno si sono trovati e si trovano tuttora geometri e filosofi, anche fra i più illustri, i quali dubitano che tutto l'universo o, con espressione anche più larga, tutto l'esistente sia stato creato soltanto in conformità della geometria euclidea, e osano perfino supporre che due linee parallele, le quali, secondo Euclide, non possono assolutamente incontrarsi sulla terra, possano invece incontrarsi in qualche punto dell'infinito. Io, mio caro, ho deciso che se non posso comprendere neppur questo, meno ancora potrei comprendere Dio. Confesso umilmente di non avere alcuna attitudine a risolvere tali problemi, io ho uno spirito euclideo, terrestre…sono tutti problemi assolutamente non adeguati a uno spirito creato con la sola nozione delle tre dimensioni[9]

Dice Ivan Karamazov, per presentare al fratello Aleksej il proprio credo.

> E che cosa immagini quando ti dicono che due linee parallele si intersecano nell'infinito? Io credo che se fossimo troppo coscienziosi non esisterebbe la matematica… Secondo me è possibilissimo che qui gl'inventori della matematica abbiano inciampato nei propri piedi. Perché mai, infatti, ciò che è al di là dei limiti del nostro intelletto non dovrebbe permettersi di giocare all'intelletto qualche tiro birbone? [10]

così Beineberg «l'unico con il quale si potesse parlare di queste cose», come afferma il giovane Törless.

Conclusione

Sicuramente l'origine della geometria è nella «misura della terra», come rivela il suo nome, e quindi in un'attività pratica: all'inizio è una disciplina di tipo empirico. In seguito, i matematici del periodo classico introducono il metodo assiomatico: è sufficiente assumere pochi principi per derivare in maniera rigorosa le altre proprietà delle figure. Se questa scoperta ha avuto il grande effetto di presentare la geometria come un modello di rigore scientifico, con essa si apre per la prima volta la strada a discussioni sugli oggetti di cui si occupa.

Molte risposte vengono date da matematici e filosofi ai problemi che si presentano, sempre nella certezza incontrovertibile della verità dei risultati. L'esperienza del mondo fisico interviene per fissare i postulati. I geometri vedono il proprio lavoro come la descrizione sempre più accurata dei fenomeni naturali e ritengono di contribuire in tal modo a svelare il disegno segreto – e armonioso – dell'universo.

Prima di Lobačevskij e di Riemann, il dibattito filosofico sulla natura dello spazio vive soprattutto sui problemi della fisica. In Gauss il problema principale della geometria è quello di descrivere lo spazio, preso in sé, rispetto alle proprietà intrinseche, le uniche che sono direttamente accessibili all'attività pratica. In Lobačevskij invece, il problema è quello di sapere se la geometria euclidea continua a valere quando ci si estende agli spazi astronomici.

Ma gli spazi si moltiplicano e con essi l'idea di spazio perde la propria connotazione originaria. La geometria sembra recidere definitivamente i propri millenari legami con la realtà fisica.

Alla fine dell'Ottocento è discutibile quale sia la natura dei postulati geometrici e di conseguenza quale forma di conoscenza sia fornita dalla geometria. Se, all'inizio della storia geometrica, con Euclide, si trattava di conoscenza «assoluta», fra Sette e Ottocento si passa dalla «intuizione pura» di Kant [11] alle «ipotesi» di Riemann, poi all'idealizzazione dell'esperienza di Helmholtz (1821-1894)[12]. Secondo Poincaré (1854-1912)[13] la geometria è solo «convenzione» e la sua scelta si basa sul criterio dell'utilità. Sul lato tecnico, la realtà viene incorporata da Felix Klein nei gruppi di trasformazioni e da David Hilbert (1862-1943) ingabbiata in una struttura assiomatica che fornisce una conoscenza «formale»[14].

Il tema della «descrizione e conoscenza dello spazio», che aveva animato per secoli il dibattito geometrico tende sempre più spesso a individuare un'autonoma «realtà matematica», rispetto alla quale gli enti fondamentali e le loro relazioni vengono assegnati – e studiati – in maniera analoga a quelli «naturali».

L'estensione raggiunta, insieme alla grande unità della geometria, sembra averle dato una nuova consapevolezza di sé: solo al fondo rimane l'idea che la geometria si occupi ancora di realtà – di un nuovo tipo di realtà.

Di fatto tuttavia, nella loro elaborazione e sistemazione delle nuove geometrie, i matematici non hanno rinunciato a mantenere i contatti con il mondo fisico. E i fisici dal canto loro non hanno rinunciato a cercare nelle astrazioni della matematica le strutture più adatte a descrivere fenomeni sempre nuovi e complessi – tipicamente quelli relativi ai fenomeni radianti – che si adattano male al vecchio spazio euclideo. Così, i rapporti della geometria con il mondo fisico si ristabiliscono a un altro livello e qui comincia un'altra storia.

NOTE

[1] È interessante osservare che, secondo il matematico e filosofo Federigo Enriques (1871-1947), le nozioni di parallelismo e di equidistanza corrispondono a due percezioni diverse degli enti geometrici: a una percezione di tipo visivo e qualitativo il fatto che due rette non si incontrino, ad una di tipo tattile e quantitativa la nozione di equidistanza (in *Problemi della scienza,* Zanichelli, Bologna 1906).

[2] Eugenio Beltrami (1835-1900), in "Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea", Giornale di Matematiche 6 (1988). Bernhard Riemann (1826-1866), in "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria", pubblicato in italiano da Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[3] Secondo un famoso aneddoto, proprio studiando la dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora, il filosofo Thomas Hobbes (1588-1679) viene catturato alla geometria dalla sua precisione e dal suo rigore metodologico.

[4] In "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti", meglio noto come *Programma di Erlangen*, prolusione accademica del 1872 all'università di Erlangen. In italiano si trova in "Pristem/storia: note di matematica, storia, cultura" n. 7 (2002), a cura di L. Magnani e R. Dossena.

[5] Entrambe le citazioni sono in *Theorie der Parallelinien*, del 1766.

[6] *Nuovi principi della geometria*, vol. II, p. 159. Le citazioni di Lobačevskij si riferiscono alla sua opera omnia *Polnoe Sobranie Sočinenii*, Mosca-Leningrado 1946-1951. In questo passo, come di consueto, chiama "geometria immaginaria" la geometria non euclidea di tipo iperbolico, distinguendola da quella "ordinaria" (euclidea), e pensando per analogia alla differenza fra numeri immaginari e numeri reali.

[7] *Sui principi della geometria,* vol. I, p. 261.

[8] *Nuovi principi della geometria*, vol. II, p. 158-159.

[9] F. Dostoevskij, *I fratelli Karamazov*, 1880, p. 261 dell'edizione italiana Mursia, Milano 1962.

[10] R. Musil, *I turbamenti del giovane Törless*, 1906, p. 107-108 dell'edizione italiana Einaudi, Torino 1959.

[11] *Critica della ragion pura* (1781).

[12] In *Sui fatti che stanno a fondamento della geometria* del 1868.

[13] Soprattutto in *La scienza e l'ipotesi* (1912), edizione italiana: Signorelli, Roma 1968.

[14] *Fondamenti della geometria* (1899). Edizione italiana: Feltrinelli, Milano, 1970.

BIBLIOGRAFIA

[1] Beltrami E., Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea, *Giornale di Matematiche*, 6 (1988).

[2] Betti R., *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Bruno Mondadori, Milano 2006.

[3] Dostoevskij F., *I fratelli Karamazov* (1880), Mursia, Milano 1962.

[4] Enriques F., *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna 1906.

[5] Helmholtz H., Sui fatti che stanno a fondamento della geometria (1868), in *Opere scelte*, UTET, Torino 1967.

[6] Hilbert D., *Fondamenti della geometria* (1899), Feltrinelli, Milano 1970.

[7] Kant I. *Critica della ragion pura* (1781), UTET, Torino 1967.

[8] Klein F., "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti [*Programma di Erlangen*], Prolusione all'Università di Erlangen, 1872; trad. it. in *Pristem/storia: note di matematica, storia, cultura*, 7 (2002), a cura di L. Magnani e R. Dossena.

[9] Lobačevski N. I., *Nuovi principi della geometria*, Boringhieri, Torino 1955.

[10] Musil R., *I turbamenti del giovane Törless* (1906), Einaudi, Torino 1959.

[11] Riemann B., *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.