Il Principio di similitudine in fisica

Roberto Casalbuoni

Dipartimento di Fisica dell'Università di Firenze
Sezione INFN di Firenze
Istituto Galileo Galilei di Fisica Teorica, Arcetri, Firenze

1. Introduzione

Il problema di cosa succeda cambiando le dimensioni degli oggetti o delle persone ha sempre affascinato l'uomo (vedi i Titani, Golia, i Lillipuziani, ecc.). Il problema è non banale perchè per capire cosa effettivamente succeda non è in genere sufficiente cambiare solo le dimensioni geometriche. Il primo ad affrontare questo problema nel modo corretto è stato Galileo Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* [3].

Il problema viene affrontato oggi con un metodo di analisi che va sotto il nome di Analisi Dimensionale o di Principio di Similitudine, in quanto si cerca di capire cosa accada passando da una data situazione ad una situazione similare. L'idea che si sfrutta è che in questo passaggio le relazioni tra grandezze fisiche rimangono invariate. Prima di discutere in dettaglio come si applichi questo principio è opportuno osservare che il Principio di similitudine è uno dei più potenti mezzi di indagine fisica con applicazioni in molti settori, per esempio:

- ricerca fondamentale: meccanica statistica (transizioni di fase, strutture cristalline); particelle elementari (gruppo di rinormalizzazione in teoria dei campi);
- teoria dei modelli (ingegneria): idrodinamica, aerodinamica, turbolenza (macchine del vento ecc.).

Il principo, come vedremo, è basato su idee molto semplici, che potrebbero essere bene introdotte anche a livello liceale.

Iniziamo il nostro percorso domandandosi cosa significhi similitudine. L'idea è molto semplice in matematica elementare: sono *simili* figure geometriche ottenute con una dilatazione comune di tutte le lunghezze. In questa trasformazione si conservano gli angoli. È possibile estendere questo concetto ad altre situazioni? Possiamo pensare di estendere il significato geometrico osservando che in geometria sono simili oggetti che hanno delle qualità in comune (per le figure piane gli angoli). Nel Medioevo ci si chiedeva quale fosse l'essenza di un oggetto, cioè cosa distingue per esempio un cavallo da un asino. Il concetto di essenza si esprimeva tramite la *quidditas*, ma la risposta non era certo molto soddisfacente: si diceva, per esempio che un cavallo possedeva l'*equinitas* mentre un asino l'*asinitas*. Quindi i cavalli risultano simili tra loro ma non simili agli asini. Il problema connesso con la definizione delle qualità di un oggetto può diventare facilmente di natura semantica, in quanto può portare a formulare frasi prive di senso, se non si rispettano le qualità assegnate. Il tipico esempio:

$$3 \text{ mele} + 2 \text{ pere} = ? \tag{1.1}$$

Se invece dico

$$2 \text{ frutti} + 3 \text{ frutti} = 5 \text{ frutti} \tag{1.2}$$

la frase risulta corretta. Dunque per confrontare delle quantità occorre parlare di quantità omogenee, che siano cioè definite come appartenenti ad una classe definita di oggetti. Le grandezze fisiche si caratterizzano in termini della loro misura e questa fa riferimento alle unità scelte. Per confrontare delle grandezze fisiche (cioè, scrivere una legge fisica) occorre che tali grandezze siano della stessa specie o, come si dice, abbiano le stesse dimensioni. Accade che tutte le quantità misurabili, o tramite le leggi della fisica o tramite la loro definizione, siano riportabili a misure di lunghezze, tempi e masse.

Che siano tre le dimensioni fondamentali è un fatto di esperienza: nessuna teoria lo spiega. Dunque, se si ha una legge fisica del tipo A = B, A e B devono avere le stesse dimensioni, in termini delle dimensioni fondamentali, e devono essere misurate nelle stesse unità. In questo caso si mostra che la legge vale in un arbitrario sistema di unità. Su ciò si basa l'analisi dimensionale che è la versione quantitativa del principio di similitudine. L'uso dell'analisi dimensionale serve non solo per verificare che le equazioni che scriviamo sono corrette, ma ha anche un potere predittivo notevole: infatti l'invarianza sotto cambiamenti di unità di misura si può anche rileggere come una invarianza della legge rispetto a trasformazioni che riscalano in maniera fissata le grandezze che intervengono. Esempio: se vale la legge A = B con A e B lunghezze, vale anche sA = sB. Come vedremo, questa invarianza di scala, conseguente dal principio di similitudine (o di omogeneità) e formalizzata nell'analisi dimensionale, ha un grande potere predittivo. Per questo il principio sarebbe uno strumento prezioso anche nelle scuole medie superiori.

2. Similitudine in Geometria

Consideriamo un quadrilatero: il suo perimetro in funzione dei lati sarà dato da

$$P = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 \tag{2.1}$$

Questa espressione si può riscrivere nella forma

$$P = \ell_1\left(1 + \frac{\ell_2}{\ell_1} + \frac{\ell_3}{\ell_1} + \frac{\ell_4}{\ell_1}\right) = \ell_1 f\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}, \frac{\ell_3}{\ell_1}, \frac{\ell_4}{\ell_1}\right) \tag{2.2}$$

L'ultima relazione può essere determinata usando l'analisi dimensionale, dato che primo e secondo membro devono avere le stesse dimensioni. Quindi il secondo membro si può scrivere come uno qualunque dei lati per una funzione *f* dipendente solo da quamtità adimensionali quali il rapporto degli altri lati con quello scelto, oppure degli angoli.

Vediamo, così, che sotto una trasformazione di scala

$$\ell_i \to s\ell_i \tag{2.3}$$

il perimetro scala in modo lineare:

$$P \to sP \tag{2.4}$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo in figura 1:

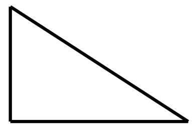

Figura 1 - Triangolo rettangolo.

La sua area è data da

$$S = \frac{hb}{2} = b^2\left(\frac{h}{2b}\right) = h^2\left(\frac{b}{2h}\right) \tag{2.5}$$

L'analisi dimensionale ci dice che, dovendo entrambi i membri avere le dimensioni di una lunghezza al quadrato, il secondo membro deve essere il quadrato di un lato per una funzione del rapporto adimensionale h/b:

$$S=b^2 f\left(\frac{h}{b}\right) \tag{2.6}$$

Analogamente se consideriamo il poligono piano di n lati in figura 2:

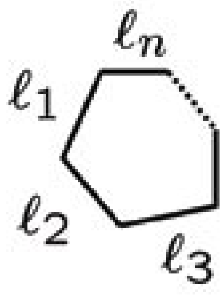

Figura 2 - Poligono di n lati considerato nel testo avremo

$$S = \ell_1^2 f\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}, \frac{\ell_3}{\ell_1}, \ldots, \frac{\ell_n}{\ell_1}\right) \tag{2.7}$$

e sotto la trasformazione di scala sui lati:

$$\ell_i \to s\ell_i \tag{2.8}$$

si avrà

$$S \to s^2 S \tag{2.9}$$

Consideriamo adesso un parallelepipedo

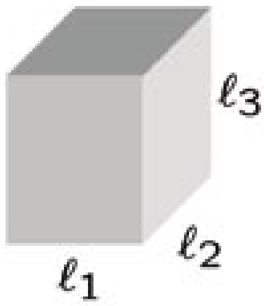

Figura 3 - Parallelepipedo.

Il suo volume è dato da

$$V = \ell_1 \ell_2 \ell_3 = \ell_1^3 \frac{\ell_2}{\ell_1}\frac{\ell_3}{\ell_1} = \ell_1^3 f\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}, \frac{\ell_3}{\ell_1}\right) \tag{2.10}$$

Questa procedura si estende facilmente ad un solido generico. Il risultato è che se modifichiamo le lunghezze di tutti i lati di un fattore s, il volume del solido cambierà di un fattore pari al cubo di s:

$$\ell \to s\ell, \qquad V \to s^3 V \tag{2.11}$$

Come applicazione di queste considerazioni si può dare una rapida dimostrazione del Teorema di Pitagora. Consideriamo il triangolo T:

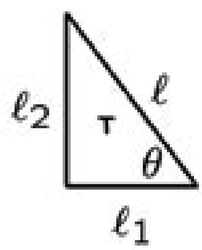

Figura 4 - Triangolo T.

Il triangolo è univocamente determinato dall'ipotenusa e dall'angolo θ (alternativamente potremmo pensarlo determinato dall'ipotenusa e da un cateto). Quindi, in base alle considerazioni precedenti, la sua area sarà della forma

$$S = \ell^2 f(\theta) \tag{2.12}$$

dato che l'angolo θ non cambia se riscaliamo tutti i lati del triangolo.

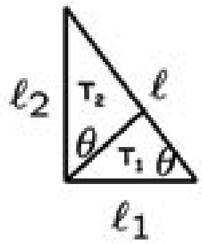

Figura 5 - La decomposizione del triangolo T nei due triangoli T_1 e T_2, entrambi simili a T.

Se costruiamo l'altezza relativa all'ipotenusa vediamo che i triangoli T_1, T_2 e T sono simili. Pertanto:

$$S_{T_1} = \ell_1^2 f(\theta), \quad S_{T_2} = \ell_2^2 f(\theta) \tag{2.13}$$

e poichè

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2} \tag{2.14}$$

segue:

$$\ell^2 f(\theta) = \ell_1^2 f(\theta) + \ell_2^2 f(\theta) \tag{2.15}$$

e semplificando si ottiene il teorema di Pitagora. Il risultato precedente vale solo se la somma degli angoli di un triangolo vale 180°. Infatti la similitudine dei tre triangoli si basa su questo assunto. Questo risultato è vero solo in uno spazio piatto ma non vale, per esempio, sulla sfera, dove le rette sono definite come cerchi di arco massimo (nell'esempio in figura la somma degli angoli del triangolo sferico è 270°).

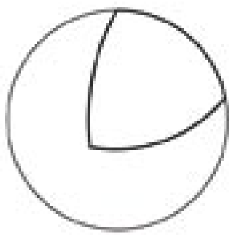

Figura 6 - Nel triangolo sferico mostrato in figura la somma degli angoli vale 270 °.

Questo è correlato con il 5° postulato di Euclide (per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data) che è il punto in cui le geometrie euclidee e quelle non euclidee differiscono. Infatti nelle geometrie non-euclidee il Teorema di Pitagora non vale (vedi Fig. 7).

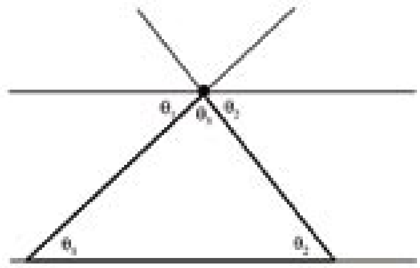

Figura 7 - Se vale il postulato di Euclide: «per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta assegnata», allora la somma dei tre angoli di un triangolo vale 180 ^{0}.

3. Galileo e le trasformazioni di scala

Galileo Galilei ha fornito uno dei primi esempi di trasformazione di scala in un caso fisico. Il passo seguente è tratto dal *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* [3]:

> E per un breve esempio di questo che dico, disegnai già la figura di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato in tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzionale a quel dell'osso minore nell'animal più piccolo, e le figure sono queste: dove vedete sproporzionata figura che diviene quella dell'osso ingrandito. Dal che è manifesto, che chi volesse mantener in un vastissimo gigante le proporzioni che hanno le membra di un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura e resistente per formarne l'ossa, o vero ammettere che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca che ne gli uomini di statura mediocre; altrimenti, crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere e cadere. Dove che, all'incontro, si vede, nel diminuire i corpi non si diminuir con la medesima proporzione le forze, anzi ne i minimi crescer la gagliardia con proporzion maggiore: onde io credo che un piccolo cane porterebbe addosso due o tre cani eguali a sè, ma non penso già che un cavallo portasse nè anco un solo cavallo, a se stesso eguale.

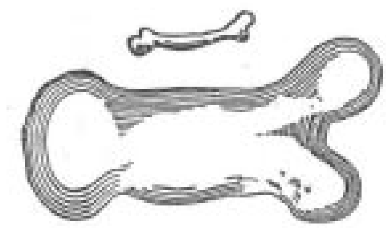

Figura 8 - Confronto delle ossa dal brano di Galileo [3].

In questo brano Galileo fa una considerazione sul cambiamento di scale in fisica. Il suo interesse si rivolge a cosa accada se, per esempio, si aumentano o si diminuiscono le dimensioni di un osso. La pressione che la forza peso esercitata sulla sezione trasversale dell'osso è proporzionale a V/S e quindi la resistenza dell'osso a S/V.

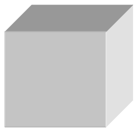

Figura 9 - Scalando le dimensioni lineari di un fattore 2 il valore della superficie di una faccia del cubo raddoppia, mentre il volume diventa 8 volte più grande. Quindi il rapporto tra volume e superficie raddoppia.

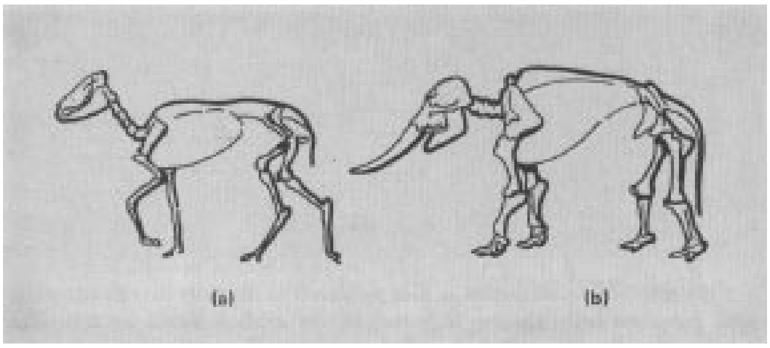

Figura 10 -. Due animali estinti, il Neohipparion (piccolo cavallo americano) a sinistra ed un Mastodonte a destra, un animale simile all' elefante, riportati in uguale scala. La figura illustra come le ossa di un animale più pesante siano più spesse e quindi più forti.

Vediamo che se scaliamo tutte le dimensioni di s la pressione (il segno ~ significa uguale a meno di fattori numerici):

$$P \sim \frac{V}{S} \tag{3.1}$$

scala come s. Quindi, aumentando le dimensioni la pressione aumenta e le capacità di resistenza diminuiscono. Questo è esemplificato nella figura 10. In figura 11 si mostra invece un esempio errato di cambiamento di dimensioni.

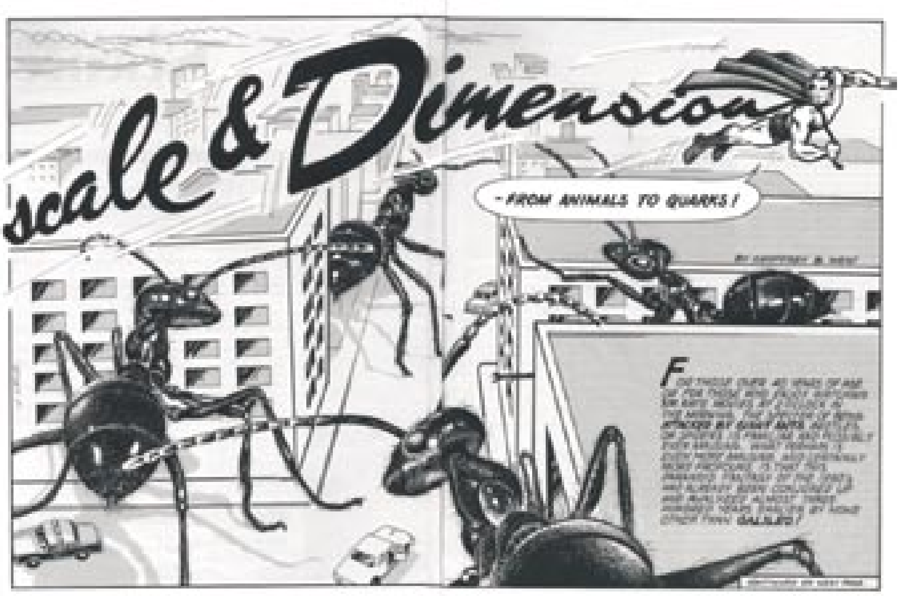

Figura 11 - La figura, ripresa da un albo di Superman di Siegel e Shuster, fa l'errore di rappresentare delle formiche giganti mantenendo inalterati i rapporti tra le varie dimensioni. Come risulta dall'argomento di Galileo, questa rappresentazione è errata.

Galileo usò un argomento di scala anche per quanto concerne il moto di caduta dei gravi, per capire la dipendenza del moto dalla resistenza dell'aria. Considerando oggetti sferici di materiale fissato il ragionamento di Galileo era che la resistenza dell'aria sulla sfera che cade è proporzionale alla superficie ed inversamente proporzionale al peso e quindi al volume. Perciò si deve avere:

$$R \sim \frac{S}{V} \sim \frac{1}{r} \tag{3.2}$$

dove r è il raggio della sfera. In questo modo Galileo dimostrò che per eliminare l'effetto della resistenza dell'aria conviene usare sfere grandi.

Un altro esempio interessante riguarda il metabolismo e la sua dipendenza dal peso corporeo in condizioni di inattività fisica. Il metabolismo si misura dalla quantità di energia (calore) perduta, B. Ci aspettiamo che la perdita sia dovuta essenzialmente ad effetti di superficie quali la sudorazione, l'irradiazione ecc. Dato che la superficie scala come il quadrato delle dimensioni lineari, mentre il volume come il cubo, cioè $S \sim \ell^2$ e $V \sim \ell^3$, segue

$$B \sim S \sim V^{2/3} \sim P^{2/3} \tag{3.3}$$

dove P è il peso corporeo (proporzionale al volume). In figura 12 questo risultato è paragonato con una serie di misure di metabolismo effettuate su vari animali. Come si vede la legge 2/3 è abbastanza ben seguita anche se la determinazione migliore effettuata sulle varie specie da come risultato $3/4 \sim 0.75$ invece di $2/3 \sim 0.67$, mostrando la presenza di effetti diversi da quelli puri di superficie.

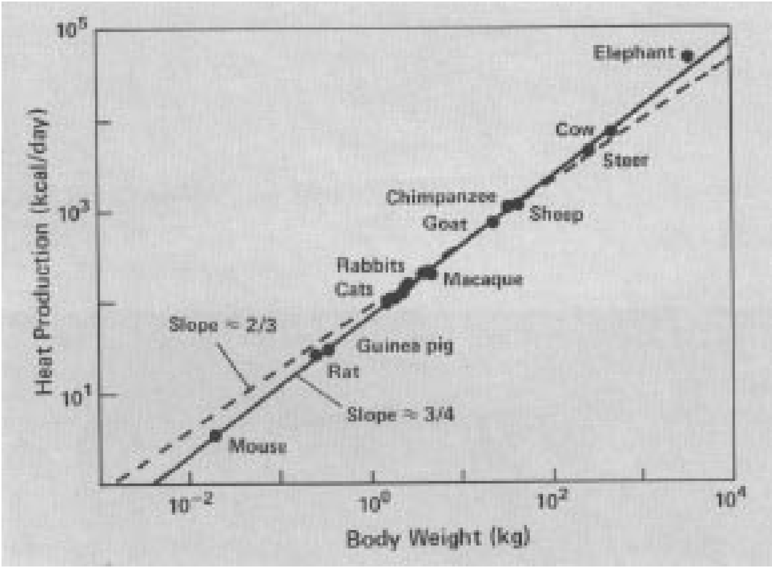

Figura 12 - Il metabolismo, B, in funzione del peso corporeo.

4. Analisi dimensionale

Le considerazioni precedenti si basano su quantità che dipendono da un solo fattore di scala geometrico (una lunghezza). Ma in fisica intervengono anche altre grandezze con dimensioni diverse. Come abbiamo già osservato, tutte le grandezze fisiche si possono riportare a misure di massa, di lunghezza e di tempo che indicheremo con i simboli m, ℓ e t. Infatti tutte le altre grandezze hanno dimensioni riconducibili alle tre precedenti, per esempio (facendo uso delle notazioni di Maxwell che definiscono le dimensioni della grandezza fisica – in parentesi quadra – in termini di potenze di m, ℓ e t):

$$[v] = \ell t^{-1}, \quad [a] = \ell t^{-2}, \quad [F] = m\ell t^{-2}, \quad [L] = [E] = m\ell^2 t^{-2} \tag{4.1}$$

dove v è la velocità, a l'accelerazione, F la forza, L il lavoro ed E l'energia. Il principio di similitudine si può formulare in modo preciso tramite la teoria dell'analisi dimensionale, da cui si possono in particolare ricavare tutti i risultati precedenti. Questa teoria fu formulata esplicitamente da Fourier [2]:

> Ogni quantità fisica ha una sua propria dimensione ed i vari termini di un'equazione non possono essere comparati se non hanno lo stesso esponente dimensionale.

Però l'analisi dimensionale fu usata per risolvere problemi fisici solo più tardi. Rayleigh nel 1915 osservava:

> Sono stato spesso impressionato dalla scarsa attenzione presentata dai ricercatori al principio di similitudine . Avviene spesso che risultati sono enunciati sotto forma di leggi nuove sulla base di esperimenti molto complessi, quando potrebbero essere ottenuti sulla base di semplici e rapide considerazioni dimensionali.

La formulazione più generale del principio di similitudine o dell'analisi dimensionale è dovuta a E. Buckingham [1], e dice:

In ogni problema fisico che coinvolge delle variabili dimensionate, la loro relazione si può esprimere costruendo tutte le possibili quantità adimensionali G, G_1, G_2,…,G_n. La soluzione è allora della forma:

$$G = f(G_1, G_2, \cdots, G_n) \tag{4.2}$$

ove *f* è una funzione di *n* variabili. Se c'è una sola quantità adimensionale allora

$$G = \text{costante} \tag{4.3}$$

Daremo di seguito una serie di risultati che si possono dedurre in questo modo senza bisogno di risolvere le equazioni fisiche che descrivono il fenomeno. In generale per ottenere dei risultati dal principio di similitudine o dall'analisi dimensionale, occorre seguire i seguenti passaggi:

- studio della fenomenologia,
- formulazione del problema,
- determinazione delle variabili da cui dipende il problema.

Consideriamo il semplice esempio della caduta di un grave:

- fenomenologia – tutti i gravi, nel vuoto, cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa;
- formulazione del problema – ci chiediamo come varia il tempo di caduta di un grave (nel vuoto) in funzione dell'altezza da cui si lascia cadere;
- risposta dimensionale – richiede la determinazione delle quantità da cui dipende il tempo di caduta. In base all'analisi fenomenologica queste saranno: l'altezza *h*, e l'accelerazione *g* di gravità. Non dipenderà però dalla massa.

Dato che vogliamo esprimere il tempo come funzione di *h* e *g*, dovremo cercare una combinazione adimensionale di queste tre grandezze. Equivalentemente possiamo cercare una combinazione di *g* e *h* con le dimensioni di un tempo. Dovremo cioè richiedere:

$$[t] = [h]^a [g]^b = \ell^a (\ell t^{-2})^b = \ell^{a+b} t^{-2b} \tag{4.4}$$

e quindi

$$a + b = 0, \quad -2b = 1 \tag{4.5}$$

o

$$a = -b = \frac{1}{2} \tag{4.6}$$

Pertanto la relazione tra il temp g deve essere:

$$T = c\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{4.7}$$

dove c è una costante. L'analisi dimensionale non fissa *c*, ma il risultato ha nondimeno la sua utilità. Per esempio, se vogliamo confrontare il tempo di caduta di due gravi ad altezze diverse avremo

$$\frac{t'}{t} = \frac{\sqrt{\frac{h'}{g}}}{\sqrt{\frac{h}{g}}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \tag{4.8}$$

che non dipende da *c*. Analogamente se vogliamo confrontare i tempi di caduta di due gravi che cadono dalla stessa altezza sulla terra e sulla luna si ha:

$$\frac{t_L}{t_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9.68}{1.72}} \approx 2.45 \tag{4.9}$$

qui t_L e t_T sono i tempi di caduta di un grave sulla luna e sulla terra rispettivamente, mentre 9.68 e 1.72 sono le accelerazioni di gravità sulla terra e sulla luna espresse in $m\ s^{-2}$.

Un'altra semplice applicazione, molto simile alla precedente, è il calcolo del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice. Trascurando gli attriti, e per piccole oscillazioni, il periodo del pendolo dipende solo dalla lunghezza e dall'accelerazione di gravità (non dipende dalla massa, perchè l'unica forza è quella di gravità e tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione). Quindi

$$T = f(l, g) = c l^a g^b \tag{4.10}$$

e anche in questo caso dovremo avere:

$$[T] = \ell^a [g]^b = \ell^{a+b} t^{-2b} \tag{4.11}$$

da cui

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.12}$$

Vediamo adesso come sia possible ricavare la terza legge di Keplero sul moto dei pianeti da considerazioni dimensionali. Ricordiamo che questa legge dice che, nell'approssimazione di considerare le orbite dei pianeti come circolari, il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole è proporzionale al raggio dell'orbita al cubo. Scriviamo la seconda legge di Newton per questo caso. Qui la forza di attrazione tra un pianeta ed il sole segue dalla legge della gravitazione universale

$$F = G\frac{mM_S}{R^2} \tag{4.13}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m è la massa del pianeta, M_S la massa del sole e R la distanza sull'orbita del pianeta dal sole. La seconda legge di Newton

($F = ma$) ci dice che

$$ma = G\frac{mM_S}{R^2} \tag{4.14}$$

Vediamo che la massa del pianeta si cancella da entrambi i lati di questa equazione e quindi le caratteristiche cinematiche del moto del pianeta, in particolare il periodo, non dipendono da m, ma dipendono solo da G, M_S e R. Dunque per il periodo T avremo:

$$T = f(R, G, M_S) \tag{4.15}$$

Le dimensioni di G possono essere dedotte dalla (4.14), con il risultato

$$[G] = m^{-1}\ell^3 t^{-2} \tag{4.16}$$

Pertanto posto

$$[T] = [R]^a [G]^b [M_S]^c = \ell^{a+3b} t^{-2b} m^{-b+c} \tag{4.17}$$

si trova

$$a + 3b = 0, \quad -2b = 1, \quad -b + c = 0 \tag{4.18}$$

e risolvendo questo sistema di tre equazioni in tre incognite si trova facilmente a = 3/2 e $b = c = -1/2$, da cui

$$T = c\sqrt{\frac{R^3}{GM_s}} \tag{4.19}$$

Quadrando entrambi i lati di questa equazione si trova

$$T^2 = kR^3 \tag{4.20}$$

dove k è una costante identica per tutti i pianeti dato che dipende da c, G e M_S.

5. Come cuocere un tacchino

Vediamo adesso una applicazione un po' più elaborata di questi metodi. Un problema interessante è: quanto tempo si deve far cuocere nel forno un tacchino (o un pollo) a seconda del suo peso. In questo problema compaiono varie grandezze:

- t = tempo di cottura
- T = temperatura del tacchino
- T_0 = temperatura del forno
- P = peso del tacchino
- ρ = densità del tacchino
- σ = coefficiente di diffusione termica

Le dimensioni di queste quantità (in particolare di P, ρ e σ) sono:

$$[P] = m\ell t^{-2}, \quad [\rho] = m\ell^{-2}t^{-2}, \quad [\sigma] = \ell^2 t^{-1} \tag{5.1}$$

Vediamo come le quantità fisiche da cui dipende il problema siano di due tipi, le temperature T e T_0 con dimensioni termodinamiche (temperatura) e le grandezze con dimensioni di tipo meccanico. Dunque potremmo formare due quantità adimensionali di cui una T/T_0 mentre per l'altra formeremo la combinazione $\sigma^a \rho^b P^c t^d$. Dato che

$$[\sigma^a\rho^b P^c t^d] = \ell^{2a-2b+c} m^{b+c} t^{-2a-2b-2c+d} \tag{5.2}$$

risolvendo le tre equazioni che derivano dall'azzerare tutti e tre gli esponenti (ricordiamo che questa quantità deve essere adimensionale) si ottiene un sistema omogeneo di tre equazioni in quattro incognite. Si possono dunque trovare tre delle quantità *a, b, c, d* in funzione di una di esse, per esempio *a*. Il risultato è

$$b = \frac{2}{3}a, \quad c = -\frac{2}{3}a, \quad d = a \tag{5.3}$$

Questo significa che la combinazione

$$\left(\sigma\left(\frac{\rho}{P}\right)^{2/3} t\right)^a \tag{5.4}$$

è adimensionale per qualunque scelta di *a*. Pertanto si dovrà avere una relazione del tipo (vedi (4.2)):

$$\frac{T}{T_0} = f\left(\sigma\left(\frac{\rho}{P}\right)^{2/3} t\right) \tag{5.5}$$

A temperature T e T_0 fissate, se scaliamo le dimensioni del tacchino, le uniche quantità che variano sono t e P, dato che il coefficiente di diffusione e la densità non cambieranno. Pertanto vediamo che in queste condizioni si deve avere:

$$t \sim P^{2/3} \tag{5.6}$$

Come si vede dalla figura 13, questa relazione è ben soddisfatta.

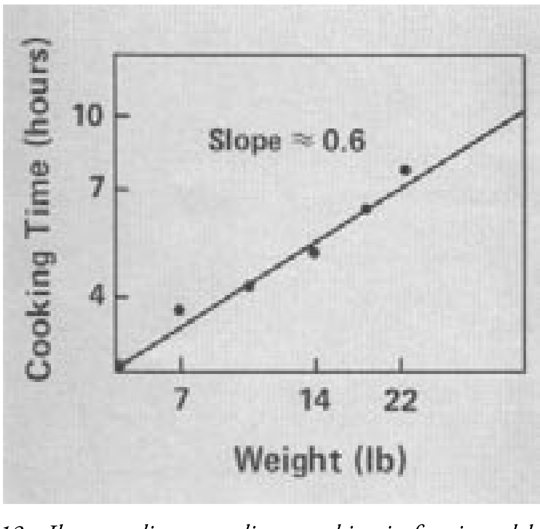

Figura 13 - Il tempo di cottura di un tacchino in funzione del suo peso.

6. L'energia della prima bomba atomica

L'esplosione della prima bomba atomica (avvenuta in una località denominata Ground Zero nel deserto di Alamogordo il 16 Luglio 1945) fu fotografata tramite foto ultrarapide con intervalli di circa 1/10 di millisecondo. Tutti i dati dell'esperimento furono tenuti segreti. Nel 1947 le foto furono rese pubbliche ed uscirono sulla la rivista *Life*. Dall'esame delle foto il fisico inglese Taylor fu in grado di determinare l'energia sviluppata dalla bomba e pubblicò i risultati dei suoi calcoli, ottenuti tramite l'analisi dimensionale [4]. L'energia della bomba era ancora un dato segreto e Taylor passò un brutto quarto d'ora con l'FBI. Quello che fece Taylor fu di determinare come variava il raggio della nuvola sollevata dall'esplosione con il tempo e confrontarla con i dati delle foto che permettevano il confronto numerico di queste quantità. Dato che in questa relazione entra l'energia della bomba, Taylor ne potè determinare l'energia con buona approssimazione.

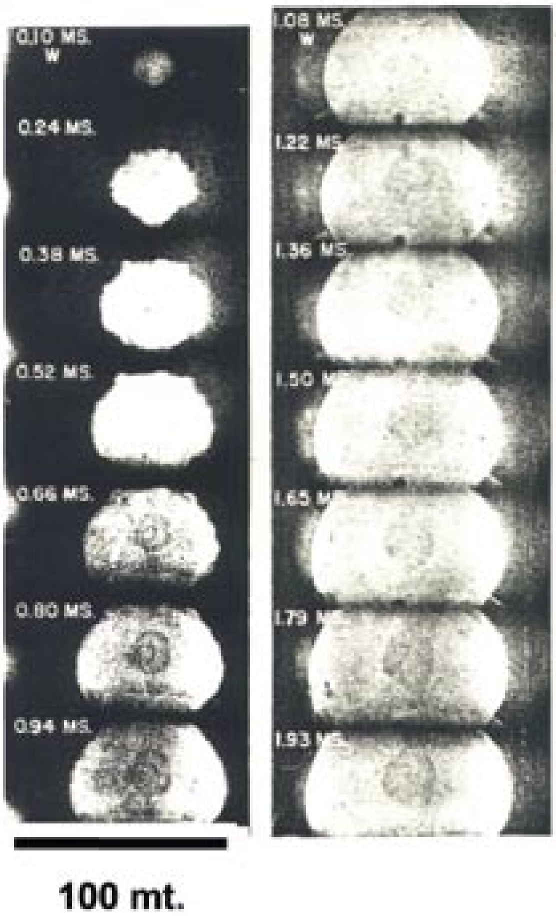

Figura 14 - La nuvola atomica che si espande al passare del tempo (Foto LIFE). Il raggio della nuvola era determinato tramite un mirino nella macchina fotografica, in grado di apprezzare una distanza di 100 metri, come mostrato in figura.

Il ragionamento di Taylor fu il seguente. Il gas della bomba ad alta temperatura si espande in aria. Quindi le quantità in gioco sono, l'energia della bomba, *E*, la densità dell'aria, ρ, il tempo di espansione, *t*, il raggio di espansione *R(t)* e la pressione dell'aria, *p*. Le dimensioni delle varie quantità sono:

$$[E]=m\ell^2t^{-2},\quad [\rho]=m\ell^{-3},\quad [t]=t,\quad [R]=\ell,\quad [p]=m\ell^{-1}t^{-2}=\frac{[E]}{[V]} \tag{6.1}$$

Chiaramente si possono formare due grandezze adimensionali (cinque grandezze per tre equazioni) che si determinano nel solito modo richiedendo che tutti gli esponenti che appaiono nella relazione dimensionale:

$$[E^a\rho^b t^c R^d p^f]=(m\ell^2t^{-2})^a(m\ell^{-3})^b t^c \ell^d (m\ell^{-1}t^{-2})^f \tag{6.2}$$

siano nulli. Risolvendo le corrispondenti equazioni in funzioni di c ed f si trova:

$$a=\frac{c}{2}-f,\quad b=-\frac{c}{2},\quad d=-\frac{5}{2}c+3f \tag{6.3}$$

La combinazione a primo membro della (6.2) diventa

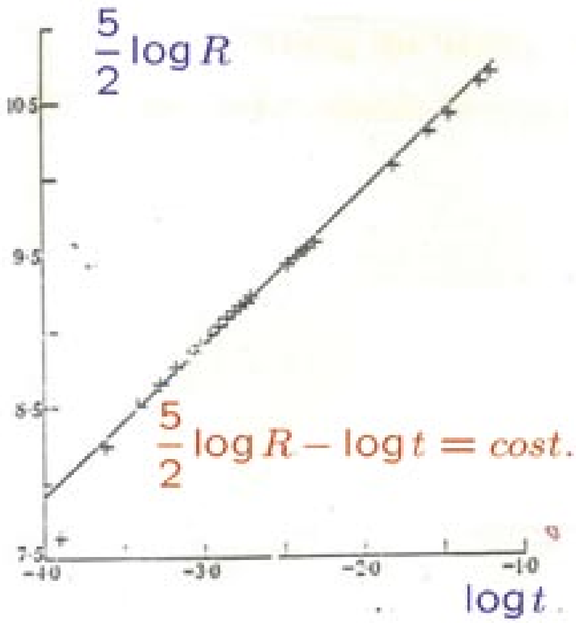

Figura 15 - Nella figura è riportato il logaritmo di R in funzione del logaritmo di t, che in base alla legge (6.9) deve essere una funzione lineare. Le croci sono i punti sperimentali ottenuti dalle fotografie di LIFE. Il valore della costante è legato alla densità dell'aria e dell'energia della bomba. Questo valore si deduce da questo grafico e si può quindi determinare E.

Le due quantità nelle parentesi devono essere separatamente adimensionali (la verifica per il secondo termine è immediata perchè la pressione ha le dimensioni di una energia diviso un volume). E quindi per il teorema di Buckingham:

$$\frac{Et^2}{\rho R^5}=f\left(\frac{pR^3}{E}\right) \tag{6.5}$$

La funzione *f* può essere calcolata nel caso dell'espansione normale di un gas in aria e si trova che *f(0) = 1*. Dato che pR^3 rappresenta l'energia gravitazionale dell'aria in una sfera di raggio R ed E è l'energia della bomba, segue che $pR^3 << E$ e quindi si può approssimare il secondo membro con 1. Risulta

$$\frac{Et^2}{\rho R^5} \sim 1 \tag{6.6}$$

da cui

$$R \sim \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{6.7}$$

Poichè E e ρ sono fissati si deduce che

$$R = ct^{2/5} \tag{6.8}$$

o, prendendo il logaritmo di entrambi i lati di questa equazione:

$$\mathrm{Log}R = \frac{2}{5}\mathrm{Log}t + \mathrm{Log}c \tag{6.9}$$

dai dati che si ricavano dalle foto (R in funzione di t) e dalla conoscenza della densità dell'aria, Taylor fu in grado di calcolare l'energia della bomba, circa 20 kilotoni (vedi figura 15).

7. Conclusioni

In questa breve discussione abbiamo mostrato l'utilità del principio di similitudine o più propriamente dell'analisi dimensionale per risolvere una serie di problemi anche complicati. Per esempio, la derivazione usuale della terza legge di Keplero parte dall'integrazione della equazione differenziale di Newton, $F = ma$. Questa integrazione richiede conoscenze di matematica un po' più raffinate di quanto non se ne abbia a livello della scuola secondaria. Al contrario i metodi basati sull'analisi dimensionale richiedono solo conoscenze di tipo algebrico. In pratica si riducono alla soluzione di un sistema lineare di equazioni. Ovviamente, la semplificazione in questa procedura è essenzialmente di tipo matematico. Per quanto concerne invece l'aspetto fisico, al fine di ottenere risultati corretti è fondamentale capire quali siano le variabili rilevanti che intervengono nel fenomeno considerato. Va da sè che quest'ultimo aspetto è fondamentale anche nel caso in cui si faccia ricorso ad una risoluzione diretta delle equazioni che descrivono il sistema in esame.

BIBLIOGRAFIA

[1] Buckingham E., On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations, *Physical Review* 4, 345, 1914.

[2] Fourier J., *Theorie Analitique de la Chaleur*, 1822.

[3] Galilei G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Appresso gli Elsevirii*, Leyda, 1638 (il passo citato è dall'edizione a cura di A. Carugo e L. Geymonat, Boringhieri, Torino 1958, pp. 143–144).

[4] Taylor G. I., The formation of a blast wave by a very intensive explosion, *Proceedings of the Royal Society*, A 201, 175, 1950.