Storia di pi greco

Alessandra Del Piccolo

Istituto Magistrale Statale 'Domenico Berti', Torino

1. Un curioso anniversario

Una volta all'anno il calendario ci offre lo spunto per passare una giornata in compagnia di uno dei più noti e, nello stesso tempo, misteriosi e affascinanti numeri apparsi nell'universo matematico, quel π che sin dalle scuole elementari ci si abitua a chiamare 3,14 permettendoci, così, di far uscire dall'anonimato il 14 marzo, ovvero il 3/14 se usiamo la notazione anglosassone.

Scopo di questo intervento è una rilettura dell'evoluzione storica del calcolo e del significato del numero π attraverso gli snodi concettuali e le variazioni di approccio al problema che possano avere risvolti interessanti da un punto di vista didattico.

2. Quando qualcuno si accorse che…

Ben prima dell'invenzione della ruota l'uomo doveva aver imparato a riconoscere il contorno estremamente regolare di un cerchio: lo poteva riconoscere nelle pupille dei suoi compagni e in quelle di alcuni animali, lo poteva scorgere nelle corolle di alcuni fiori, lo poteva ammirare ogni giorno nel disco del Sole e, nelle notti più belle, in quello della Luna.

Di sicuro non potremo mai sapere chi fu il primo ad accorgersi che, pur tracciando con un bastoncino cerchi diversi nella sabbia, i loro diametri e le rispettive circonferenze mantenevano un rapporto costante tra loro. Quel che sappiamo è che il simbolo π venne usato per denotare il valore costante di questo rapporto solo a partire dal XVIII secolo (d. C. ovviamente!) e che le doppie lineette sovrapposte come simbolo di uguaglianza entrarono nell'uso corrente dalla seconda metà del 1500, per cui la formalizzazione del problema nei termini a noi tutti familiari, ovvero

$$\pi = \frac{C}{d}$$

dove C è la lunghezza della circonferenza e d la lunghezza del rispettivo diametro – *indipendentemente* da quale cerchio si consideri – è conquista tutto sommato recente.

3. Come misurare π nelle sabbie del Nilo

Non c'è alcuna prova diretta che gli Egizi si siano effettivamente accorti della costanza del rapporto tra circonferenza e diametro né che abbiano tentato di calcolarne il valore. Di certo essi furono interessati a trovare il rapporto tra il cerchio e il quadrato, come si può leggere sul noto Papiro Rhind (reperto risalente al 1650 a. C. circa, ora conservato al British Museum di Londra) su cui lo scriba Ahmes scrisse:

> Togli 1/9 a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio.

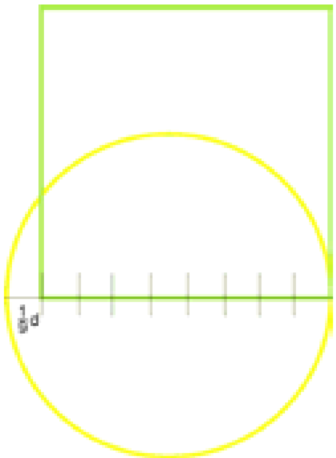

Figura 1 - La quadratura del cerchio secondo le indicazioni dello scriba Ahmes

Sapendo che l'area del cerchio è pari a πr^2 e che quest'area deve essere uguale a quella di un quadrato di lato 8/9, il testo di Ahmes permette di ricavare

$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots$$

con un errore inferiore all'1% su quello oggi noto[1].

4. Cerchi e quadrati equivalenti

Le indicazioni lasciate sul Papiro Rhind si possono considerare come il primo tentativo di «quadrare il cerchio», ovvero di trovare un quadrato di area equivalente a quella di un cerchio dato.

Il problema della *quadratura del cerchio*, intimamente connesso con π, appassionò i matematici antichi fin dal suo primo apparire in quella che fu la civiltà che, più di ogni altre, contribuì a definire i contorni della matematica come luogo privilegiato di esplorazione di idee e di significati: la civiltà greca. In essa, infatti, la matematica assunse da subito carattere originale rispetto alle tradizioni precedenti o contemporanee: non si trattò più di adattare la scienza dei numeri a esigenze pratiche di agrimensura o di costruzione di edifici, quanto piuttosto di esplorare questioni puramente teoriche che iniziarono a far apprezzare la sottile distinzione che intercorre tra l'accuratezza di un'approssimazione e l'esattezza di un concetto.

Sembra che si debba ad Ippocrate il primo trattato di geometria della storia matematica, scritto più di un secolo prima dei celeberrimi *Elementi* di Euclide, ma nessun frammento dell'opera è giunto fino a noi. Proprio nell'opera euclidea vennero formalizzate le due regole che, da quel momento in poi, consentirono di discriminare tra soluzioni «canoniche» e soluzioni «illegittime» di un problema geometrico:

- la costruzione delle figure deve avvenire tramite l'utilizzo esclusivo di riga e compasso;
- deve essere possibile effettuarla attraverso un numero finito di passi.

Purtroppo questi limiti resero impossibile il problema della quadratura del cerchio (come anche quello della duplicazione del cubo o della trisezione dell'angolo, gli altri due problemi 'classici' dell'antichità), ma ci vollero 2300 anni perché qualcuno riuscisse a dimostrarne l'impossibilità[2]! Avremo modo di ritornare sull'argomento.

5. Il genio di Archimede

Dobbiamo a Democrito di Abdera (460-370 a. C.) il tentativo di analizzare le proprietà dei solidi non considerandoli nella loro interezza ma come somma di infinite sezioni. Nello stesso periodo altri due matematici, Antifonte e Brisone di Eraclea, proposero di trovare l'area del cerchio attraverso le aree di poligoni regolari inscritti e circoscritti ad un cerchio, utilizzando un nuovo metodo che venne formalizzato da Eudosso di Cnido (409-356 a. C. circa) quasi un secolo dopo: il *metodo di esaustione*.

Una nuova strada era stata aperta e il primo che la percorse con successo per il calcolo di π fu Archimede di Siracusa (287-212 a. C. circa).

A differenza di Antifonte e di Brisone, egli non considerò più le aree dei poligoni inscritti e circoscritti, bensì i loro perimetri, trovando così un'approssimazione della circonferenza del cerchio. Partendo dall'esagono regolare inscritto,

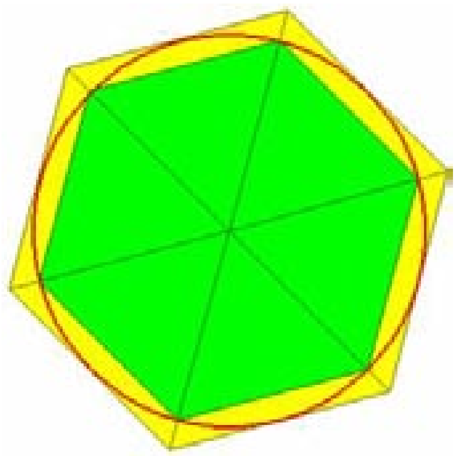

Figura 2 - L'esagono inscritto e l'esagono circoscritto ad una circonferenza: punto di partenza per la procedura archimedea

Archimede calcolò i perimetri dei poligoni ottenuti raddoppiando successivamente il numero dei lati fino a raggiungerne 96. Il procedimento iterativo si ricollega a quello che viene talvolta chiamato *algoritmo archimedeo*:

- si sviluppa la serie P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, …, dove P_n e p_n sono i perimetri dei poligoni regolari di *n* lati circoscritti e inscritti alla circonferenza data;

- a partire dal terzo termine, si calcola il successivo in base ai due termini precedenti alternando le loro medie armonica e geometrica, ovvero

$$P_{2n} = \frac{2 \cdot p_n \cdot P_n}{(p_n + P_n)} \quad e \quad p_{2n} = \sqrt{p_n \cdot P_{2n}}\,.$$

Il metodo usato da Archimede per calcolare le radici quadrate, per trovare il perimetro dell'esagono circoscritto e per calcolare le medie geometriche, era simile a quello usato dai babilonesi, ma il risultato a cui perveniva era di gran lunga migliore di tutti quelli determinati fino a quel momento.

Egli pubblicò i suoi lavori nel libro *Sulla misurazione del cerchio*, dove si legge:

> La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro, più una parte minore di un settimo del diametro e maggiore di dieci settantunesimi.

Quindi

$$3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}\,.$$

Se si fa una media tra i due valori si ottiene 3,1419, con un errore di meno dei tre decimillesimi sul valore reale!

La grandezza di Archimede consiste proprio nell'aver proposto per primo un metodo che permettesse di scegliere il grado di precisione da attribuire al risultato del calcolo, sfruttando quindi al meglio l'intuizione di Eudosso e la successiva formalizzazione di Euclide.

Concetti come «arbitrariamente vicino a» oppure «prossimo quanto si vuole» vengono utilizzati con estremo rigore e maestria: siamo di fronte ad una delle tante manifestazioni di un'abilità di calcolo straordinaria del matematico siracusano, ancor più evidente se si pensa che egli non poteva disporre né di un simbolo per lo zero né di alcuna sorta di notazione decimale: il pensiero occidentale venne a conoscenza di tali strumenti matematici solo a partire dal Basso Medioevo attraverso contatti con pensatori indiani e arabi e grazie all'opera di matematici del calibro del Fibonacci.

6. Uno sguardo al di fuori dell'Europa

Mentre in tutta Europa governi in guerra e lotte religiose soffocarono l'istruzione, la ricerca e il libero flusso delle informazioni, grandi progressi scientifici furono compiuti dal II all'VIII secolo d. C. in Cina e in India, già sedi di prestigiose comunità matematiche nei secoli precedenti. Ricordiamoci che qui l'uso dello zero e della notazione decimale erano già pratica corrente tra i matematici e questo costituiva un duplice indubbio vantaggio.

Quasi 650 anni dopo Antifonte e Brisone, in Cina, il matematico Liu Hui riscoprì lo stesso metodo e iniziò i calcoli, usando prima un poligono di 192 lati poi di 3072 lati.

Nel V secolo, il grande astronomo Tsu Ch'ung-chih e suo figlio Tsu Keng-chih, partendo da un esagono e raddoppiandone i lati undici volte, arrivarono a calcolare il perimetro di un poligono di 24.576 lati, ottenendo:

$$\pi = \frac{355}{113}$$

Il valore differisce da quello oggi accettato solo a partire dall'ottava cifra decimale: nessuno avrebbe trovato un valore più preciso per oltre mille anni.

Il più grande matematico indiano del VII secolo, Brahmagupta, pensò invece di poter individuare una regolarità in grado di svelare il vero rapporto tra circonferenza e diametro. Innanzitutto calcolò i perimetri dei poligoni inscritti di 12, 24, 48 e 96 lati, ottenendo rispettivamente i valori $\sqrt{9,65}$, $\sqrt{9,81}$, $\sqrt{9,86}$, $\sqrt{9,87}$.

Poi, armato di questa informazione, Brahmagupta fece un salto di fede supponendo che, aumentando il numero dei lati e avvicinando sempre di più i poligoni alla circonferenza, i loro perimetri – e quindi π – si sarebbero sempre più avvicinati a $\sqrt{10}$. Era, ovviamente, del tutto in errore, ma questo fu il valore che poi si diffuse dall'India all'Europa e che fu usato nel Medioevo dai matematici di tutto il mondo forse anche per l'estrema facilità con cui si poteva ricordare e trasmettere.

7. Il Rinascimento europeo

Si deve aspettare la fine del Cinquecento per assistere a un nuovo e significativo passo in avanti sulla strada del calcolo di π, questa volta a opera di un giurista e matematico dilettante francese, François Viète (1540-1603).

Da un punto di vista concettuale, il suo fu un contributo rivoluzionario, benché prendesse le mosse ancora una volta dal metodo archimedeo dei poligoni inscritti e circoscritti: per la prima volta π veniva espresso tramite un prodotto di infiniti termini ottenuto tramite semplici considerazioni geometriche e con l'ausilio della *trigonometria*, uno strumento matematico sostanzialmente nuovo. Esso, infatti, fu riscoperto in pieno Rinascimento da astronomi quali Copernico e Keplero - che se ne servirono per compilare mappe del cielo accuratissime – dopo una prima apparizione presso gli astronomi dell'Età alessandrina quali Eratostene di Cirene (276 - 194 a. C. circa), Aristarco di Samo (310 - 230 a. C. circa) e successivamente Tolomeo di Alessandria, le cui osservazioni si possono datare tra il 127 e il 151 d. C.

La procedura utilizzata da Viète metteva in relazione l'area di un poligono regolare inscritto a *n* lati con quella di un poligono di 2*n* lati.

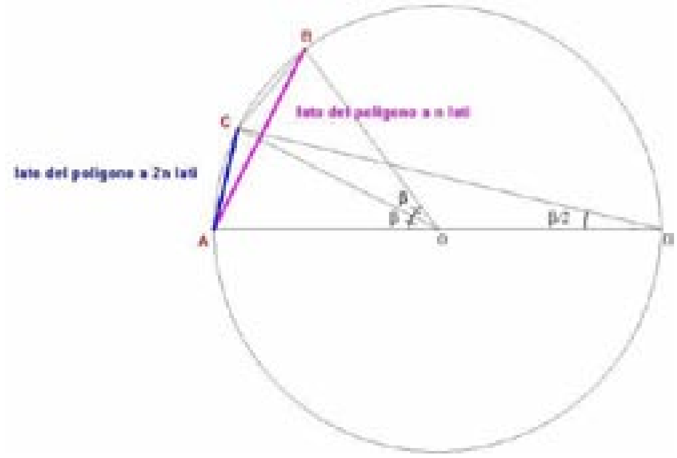

Figura 3 - Approccio trigonometrico della procedura di Viète: lati e angoli in relazione

Osservando la figura è facile riconoscere che l'area del primo poligono è:

$$\begin{aligned} A(n) &= n \cdot \text{ area}(\text{AOB}) = \\ &= \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin 2\beta = \\ &= n \cdot r^2 \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

Analogamente l'area del secondo poligono si può esprimere come

$$A(2n) = n \cdot r^2 \cdot \sin\beta .$$

Facendo il rapporto tra le due aree si ottiene

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \cos\beta .$$

Dimezzando nuovamente i lati del poligono, si ha

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} = \cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2};$$

al *k*-esimo dimezzamento si giunge alla seguente uguaglianza:

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} \times \ \dots \ \times \frac{A(2^{k-1} n)}{A(2^k n)} = \cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \ \dots \ \cdot \cos\frac{\beta}{2^k} .$$

Se k diventa infinitamente grande l'area del poligono risulta indistinguibile da quella del cerchio, cioè:

$$\lim_{k\to\infty} A(2^k n) = \pi r^2$$

per cui

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \cdot \sin 2\beta}{\cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2^2} \cdot \cos\frac{\beta}{2^3} \cdot \ldots}.$$

Viète scelse un quadrato per cominciare, cosicché $n = 4$, $\beta = 45°$, $\cos\beta = \sin\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Inoltre poteva utilizzare la formula di bisezione $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\beta}$ ottenendo infine:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots$$

Quest'ultima espressione fu pubblicata da Viète nel 1593 nel suo *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*: essa rappresenta una pietra miliare nella storia di π ed è anche il punto più alto raggiunto dal rinascimento matematico in questo ambito.

Purtroppo, Viète stesso si rese conto che la formula, malgrado la sua indubbia eleganza, risultava poco efficace quando si trattava di calcolare effettivamente il valore di π. Viète riuscì a determinare le prime dieci cifre decimali utilizzando poligoni di 393.216 lati (a partire da $n = 6$ e considerando $k = 16$): era la misura più accurata ottenuta fino a quel momento[3].

8. Efficienza, innanzitutto

All'inizio del Seicento il calcolo di π assunse i contorni di una prova di tenacia e di resistenza: il metodo di esaustione era stato spremuto a più non posso e la strategia stava perdendo di attrattiva anche perché richiedeva costi enormi - vite intere spese in mezzo a calcoli laboriosi – a dispetto di benefici poco consistenti – qualche decina di cifre decimali.

I tempi erano però maturi per far germogliare nuove idee; come se non bastasse, nel giro di duecento anni si avvicendarono sulla scena alcuni dei matematici più affascinanti e acuti del II millennio. Per la matematica fu un periodo di straordinaria vitalità, un'ideale staffetta in cui ognuno preparò il terreno al proprio successore.

Nel 1655, infatti,apparve – non senza scatenare polemiche - *l'Arithmetica infinitorum* di John Wallis (1617-1703) in cui si abbandonò qualsiasi considerazione geometrica e si propose, al posto, un *approccio completamente aritmetico*. I calcoli, pur sempre notevoli, risultarono semplificati e portarono a stabilire una delle formule più eleganti fino a quel momento apparse per il calcolo di π, ovvero:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots}$$

Come già quella di Viète, la formula di Wallis esprime π mediante un prodotto infinito in cui, però, tutti i fattori sono numeri naturali. Essa consente un'approssimazione mediante un lento avvicinamento al suo valore limite in una continua oscillazione tra un termine maggiore di π e il successivo minore di π.

9. Gli sviluppi … in serie!

Verso la fine del Seicento si assistette ad un ulteriore passo avanti grazie allo scozzese James Gregory, scomparso a soli trentasei anni nel 1675. Egli trovò una soluzione estremamente elegante del calcolo della arcotangenti che si rivelò feconda di implicazioni per il calcolo di π. In una lettera del 15 febbraio 1671 Gregory menzionò la *serie*:

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Si può facilmente ottenere una formula di approssimazione per π se solo si considera $x = 1$, ovvero *arctg* (1). Infatti, l'arco la cui tangente è pari a 1 vale 45° e in radianti:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Purtroppo, di Gregory non ci è rimasto nessuno scritto che provi un suo tentativo in questa direzione. Qualche anno più tardi, però, fu Leibniz a riscoprire sia la serie sia il suo caso particolare rendendo pubblici i suoi risultati nel 1682. Per questo la serie è nota come *serie di Gregory-Leibniz*.

Nel giro di poco tempo la ricerca delle cifre decimali di π fece un brusco salto in avanti scatenando una sorta di competizione tra i matematici di fine Seicento: l'obiettivo era quello di calcolare sempre più cifre e ciò stimolò la ricerca di formule di approssimazione sempre più efficaci tali, cioè, da convergere con la massima rapidità[4].

Chi più di tutti fu fecondo di risultati su ogni branca della matematica fino ad allora conosciuta fu il matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783) – it. Eulero. La sua opera monumentale, frutto di una vita di studi condotti anche quando ormai aveva perso la vista da entrambi gli occhi, nacque da una produzione annuale media di ottocento pagine, tanto che ci è rimasta una bibliografia di 886 titoli nonché migliaia di lettere testimoni di una corrispondenza fittissima con i più famosi matematici del tempo.

Il suo contributo per il calcolo di π fu notevolissimo. Ecco alcune delle formule che riuscì a scoprire, tutte più efficaci[5] di quella di Gregory:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \cdot arctg\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \cdot arctg\left(\frac{3}{79}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{(2^2-1)}\times\frac{3^2}{(3^2-1)}\times\frac{5^2}{(5^2-1)}\times\frac{7^2}{(7^2-1)}\times\frac{11^2}{(11^2-1)}\times\ldots$$

$$arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\times\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{11}{10}\times\frac{13}{14}\times\frac{17}{18}\times\frac{19}{18}\times\frac{23}{22}\times\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$1-\sin x=\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2x}{7\pi}\right)^2\cdot\ldots$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\ldots$$

Inoltre, fu proprio *grazie a lui* che si diffuse l'uso di utilizzare il simbolo π per denotare il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro; ancora nel 1734 utilizzava la lettera *p* ma già nel 1736, negli articoli e nella sua corrispondenza privata, iniziò ad usare regolarmente π per denotare il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro. Il suo esempio fu contagioso e alla fine del secolo quasi tutti i matematici europei avevano adottato la stessa simbologia.

Da quel momento si scatenò una vera e propria caccia ai decimali che durò per tutto il secolo seguente e che culminò nelle 707 cifre decimali calcolate da William Shanks nel 1873.

10. Un ago per catturare π

Nel 1777 George Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788) propose, risolvendolo, un curioso problema che fece intervenire π in un contesto originale aprendo così la strada per una nuova branca della *teoria della probabilità*, fino a quel momento confinata all'interno della teoria dei giochi.

Buffon suppose di considerare una vasta area piana sulla quale erano state tracciate linee rette parallele a distanza *d* una dall'altra; immaginava, poi, di gettare a caso su di essa un sottile ago di lunghezza $L < d$. Le cose che potevano accadere erano due: o l'ago incontrava una delle linee oppure cadeva tra una linea e l'altra. Qual era la probabilità che l'ago intersecasse una delle linee?

Assumiamo che «a caso» significhi che ogni orientazione dell'ago e ogni posizione del suo centro siano due variabili indipendenti e equiprobabili; sia φ l'angolo che permetta di individuare l'orientazione dell'ago rispetto alle rette disegnate e sia x la distanza del centro dalla retta più vicina. Come risulta evidente dalla figura,

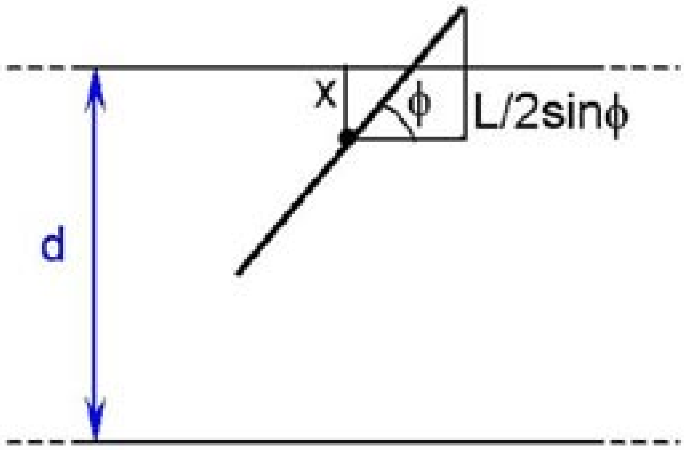

Figura 4 - I limiti geometrici del problema dell'ago di Buffon.

la condizione affinché l'ago incontri una retta sarà:

$$x < \frac{L}{2}\sin\varphi,$$

per cui il problema è risolto se si determina la probabilità

$$P\left(x < \frac{L}{2}\sin\varphi\right).$$

A tal fine Buffon propose un approccio geometrico, trasformando la definizione classica di probabilità – rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di quelli possibili – in un rapporto tra aree opportunamente individuate.

I limiti geometrici insiti nel problema sono $0 < x < \frac{d}{2}$ e $0 < \varphi < \pi$; utilizzando un grafico (φ; x) questi permettono di individuare un rettangolo la cui area, pensata come insieme di punti, rappresenta la somma di tutte le possibili combinazioni tra l'orientazione dell'ago e la posizione del suo centro sul piano. Le combinazioni favorevoli, invece, sono individuate dai punti le cui coordinate soddisfano la condizione sopra determinata, ovvero tutti quei punti che si trovano al di sotto della curva $x = \frac{L}{2}\sin\varphi$.

.

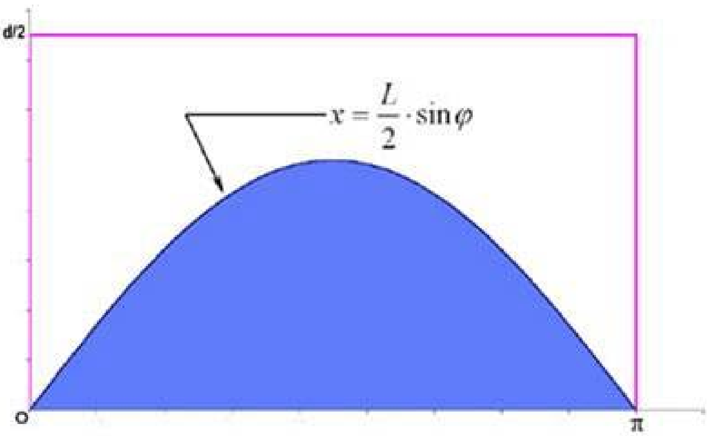

Figura 5 - Interpretazione geometrica della probabilità classica attraverso un confronto tra aree.

Detto questo, risulta evidente che

$$P\left(x < \frac{L}{2}\sin\varphi\right) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{\text{area azzurra}}{\text{area del rettangolo}} = \frac{\frac{L}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi}{\pi\cdot\frac{d}{2}},$$

ovvero:

$$P = \frac{2L}{\pi d},$$

o meglio:

$$\pi = \frac{2L}{dP}.$$

Buffon stesso tentò una verifica sperimentale del suo risultato lanciando[6] più volte un ago su una superficie rigata, ma il problema e la sua soluzione furono persi di vista finché Pierre Simone Laplace (1749-1827) – uno dei più grandi matematici francesi di tutti i tempi – non se ne occupò, proponendone anche una generalizzazione (rigando la superficie con linee tra loro perpendicolari) e gettando le basi per quello che oggi è noto come *metodo MonteCarlo.*

Usando la terminologia moderna, si può descrivere il metodo come l'insieme di tutte quelle procedure di calcolo che, utilizzando sequenze di numeri casuali (numeri random) consentono, ad esempio,

- il calcolo di quantità
- la simulazione di fenomeni.

Con l'avvento dei calcolatori il metodo svelò le sue enormi potenzialità e la sua straordinaria efficacia, visto che divenne possibile generare e manipolare grandi quantità di dati in tempi brevi.

11. La natura di π

Dopo migliaia di anni spesi nell'affannosa corsa alla determinazione dei decimali di π, con la segreta speranza di trovare una formula che permettesse di «imbrigliare» definitivamente un cavallo troppo bizzoso, era tempo di fermarsi a riflettere: qual era la vera natura di quel numero le cui cifre decimali sembravano sfuggire a qualsiasi regolarità?

Già da secoli i matematici erano convinti di trovarsi di fronte ad un numero irrazionale, ma la dimostrazione conclusiva arrivò solo nel 1761 grazie a Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Il suo ragionamento si basava sul fatto che, se x è un numero razionale diverso da zero, tan x deve essere irrazionale e viceversa, cosa da lui dimostrata in precedenza. Ma allora, visto che $\tan\frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbb{Q}$, segue che $\frac{\pi}{4}$ non può essere razionale, e così pure π.

Nel 1794 anche Adrien-Marie Legendre giunse alla stessa conclusione per altra via e provò anche l'irrazionalità di π^2. Vent'anni prima, Euler aveva però suggerito che π fosse un numero trascendente e anche Legendre coltivò la stessa convinzione. Nei suoi *Éléments de géométrie* del 1794 si legge:

> E' probabile che il numero π non sia neppure contenuto nelle irrazionalità algebriche, ossia che non possa essere una radice di un'equazione algebrica con un numero finito di termini, i cui coefficienti siano razionali. Pare però molto difficile dimostrarlo in modo rigoroso.

Fu Joseph Liouville (1809-1882) a dimostrare l'esistenza di tal categoria di numeri, che furono chiamati trascendenti. Il primo esemplare di tal insieme fu trovato da Charles Hermite nel 1873: era il numero *e*, e tal scoperta non fece che infiammare nuovamente le discussioni sulla natura di π.

Finalmente, nel 1882, Ferdinand von Lindemann (1852-1939) riuscì ad arrivare a capo dell'enigma, sfruttando una delle più belle e significative equazioni di tutta la matematica che Euler aveva reso famosa. Dapprima, infatti, egli mostrò che l'equazione $e^{ix} + 1 = 0$ non poteva avere soluzioni algebriche; poi utilizzò il risultato che già Euler aveva trovato, ossia

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

il che dimostrava che π non poteva essere algebrico.

Questo straordinario risultato mise la parola «fine» al problema della quadratura del cerchio: era impossibile trovare il quadrato equivalente ad un cerchio dato tramite le regole classiche.

12. Una sfida senza fine

Come abbiamo già avuto modo di dire, l'Ottocento si chiuse con un record: W. Shanks era riuscito a calcolare 707 decimali, migliorando un suo precedente primato di 607 cifre.

Nel 1945 D. F. Ferguson si accorse che il calcolo di Shanks conteneva un errore alla posizione 527: era il frutto di un anno di lavoro con carta e penna, al ritmo medio di poco più di una cifra al giorno! Fortunatamente, da lì a un paio d'anni, Ferguson potè servirsi di una delle prime calcolatrici da tavolo e nel settembre del 1947 determinò 808 cifre.

Per i matematici era la fine dell'incubo degli interminabili calcoli a mano: con un calcolatore a disposizione, la tentazione di andare oltre ogni limite prese sempre più consistenza. Così, nel 1948 Smith e Wrench arrivarono alla millesima cifra; l'anno dopo entrò in funzione l'ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*) e con questo mastodonte dal peso di tonnellate ci vollero solo settanta ore per calcolare 2037 cifre di π.

Con l'avvento del computer elettronico gli attacchi a π si fecero ancora più pressanti. Già nel 1954, utilizzando il NORC (*Naval Ordinance Research Calculator*), ci vollero solo tredici minuti per calcolare 3089 cifre; tre anni dopo, il Paris Data Processing Center, con l'ausilio di un IBM 704, calcolò in soli quaranta secondi le 707 cifre che Ferguson aveva determinato in un anno. Fu solo più questione di velocità di computo della macchina e di affidabilità della stessa e π divenne sempre di più il banco di prova ideale per testare rapidità e precisione di ogni nuovo calcolatore. L'incremento di cifre seguì ritmi esponenziali: il primo milione nel 1973; 16 milioni nel 1983; un miliardo nel 1989; 6 miliardi nel 1995; 51,5 miliardi nel 1997 in poco più di 29 ore. Tra settembre e dicembre del 2002, dopo circa 600 ore di lavoro con un HITACHI SR8000/MP, si giunse a $1{,}2411 \times 10^{12}$ cifre: numeri che fanno girare la testa!

Parecchi i protagonisti di questa corsa anche se, fra tutti, spiccano nomi come quelli del giapponese Yasumasa Kanada e dei russi David e Gregory Chudnovsky, due fratelli che, pur di esplorare a piacimento i meandri di π, si sono costruiti con le loro mani un supercomputer con pezzi comprati d'occasione.

Sembra che, a tutt'oggi, le cose stiano in questi termini: determinare un numero sempre maggiore di cifre decimali non ha alcuna utilità pratica se non quella di mettere alla prova i calcolatori, tanto che Philip J. Davis ha scritto:

> il misterioso e mirabile π è ridotto a un gargarismo che aiuta i computer a schiarirsi la voce.

Rimane, però, la segreta speranza che una migliore conoscenza della natura di π possa risultare utile alla comprensione della geometria, della matematica e di tutti quei fenomeni fisici in cui il numero interviene in maniera sorprendente.

NOTE

[1] Malgrado la notevole precisione del risultato, il valore ebbe poca diffusione e mille anni dopo Babilonesi e Ebrei continuavano a usare per π il valore 3. Nell'Antico Testamento, I Re, 7: 23, così viene descritto l'altare costruito per il tempio di Salomone: «Poi si fece il mare fuso: dieci cubiti da una sponda all'altra,cioè completamente rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno».

[2] Ancora oggi, a dire il vero, i cosiddetti ciclometristi (gli appassionati della misurazione del cerchio) sono ostinatamente convinti – per quanto la cosa possa risultare incredibile – di aver trovato la soluzione del rompicapo e cercano di far proseliti professando, con fanatica passione, la loro 'verità'.

[3] Qualche anno dopo, nel 1610, moriva a Leida Ludolph von Ceulen, un matematico che spese quasi tutta la sua vita a calcolare i decimali di π, utilizzando poligoni che avevano più di 32 miliardi di lati ciascuno! Alla fine di un lavoro meticoloso ed estenuante arrivò a calcolarne 35. In suo onore, in Germania, π prese il nome di *numero ludolfiano*.

[4] Anche Newton, durante il suo cosiddetto *annus mirabilis* trascorso a Woolsthorpe per sfuggire alla peste di Londra del 1655, passò molte ore assorbito dal problema tanto che ebbe a scrivere successivamente: «mi vergogno a dirle quante cifre calcolai, non avendo altro da fare a quel tempo».

[5] Euler riusciva a calcolare 20 decimali in una sola ora!

[6] Nel 1901 il matematico Lazzerini riuscì a valutare π tramite 34.080 lanci. La curiosità consiste nel risultato a cui giunse, cioè $\pi = \frac{355}{113}$, proprio lo stesso valore di Tsu Ch'ung Chi.

Bibliografia

[1] Beckmann P., *A History of Pi*, St Martin's Press, New York 1976.

[2] Blatner D., *The Joy of Pi*, Walker, New York 1997.

[3] Boyer C. B., *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondatori, Milano 1990.