La geometria dimenticata[1]

La struttura di questo intervento è la seguente: un rapido excursus sull'evoluzione della geometria fino a Cartesio e successivamente una descrizione della doppia problematica cartesiana, per ricordare quello che talvolta viene scordato, cioè, il fatto che la visualizzazione geometrica di un problema matematico spesso, oltre a esser efficiente, può rappresentare anche un'operazione di stimolo per la fantasia degli studenti (vedi esempio finale).

1. Rapidi cenni sull'evoluzione della geometria prima di Cartesio

La geometria raggiunge la dignità di scienza, e non più esclusivamente di tecnica, con Talete (640-547 a. C.) che, come vedremo, introduce un concetto rivoluzionario. Nel periodo precedente la geometria, come rivela l'etimologia della parola (geo-metria = misura del terreno), aveva il compito di fornire strumenti funzionali alle misurazioni di grandezze fisiche come aree, altezze, ecc.

Lo scatto qualitativo avviene quando Talete introduce il *concetto di astrazione*: la possibilità, cioè, di immaginare (col pensiero) gli oggetti geometrici non nella loro concretezza, ma nella loro essenza. Ad esempio, pensare a un triangolo rettangolo non significa prenderne in considerazione uno ben determinato, ma immaginare una classe astratta costituita da tutti i triangoli con un angolo di novanta gradi e pensarla come un tutt'uno.

Questa funzione del nostro cervello, che i neurologi moderni hanno individuato in una precisa zona detta F2, oggi è un`attitudine diffusa del nostro pensiero ma, storicizzata, appare una presa di coscienza rivoluzionaria e come tale, probabilmente, era patrimonio solo di una classe di persone finemente colte.

La capacità astrattiva è la madre della geometria come scienza. Le conseguenze sono state la definizione astratta degli enti geometrici

---

1 Questa breve esposizione è la versione ridotta di una conferenza tenuta a Grosseto il 24 ottobre 2007 nell'ambito di *Pianeta Galileo*.

e le regole del gioco che consentono, con metodo esclusivamente logico-deduttivo, la scoperta di proprietà (proposizioni o teoremi). Fare geometria diviene, dunque, "pensare geometricamente in senso astratto".

Passando ad un livello di dettaglio più preciso, fu "Euclide" (367-283 a.C.) a dare una sistemazione organica a questa impostazione. Le virgolette sono necessarie in quanto gli studiosi si sono divisi sulla storicità della figura di Euclide: alcuni sostengono che sia stato effettivamente *un personaggio storico* realmente vissuto e autore della sua produzione scientifica, altri che il suo nome sia stato semplicemente uno *pseudonimo di un'équipe* di matematici che lavoravano in gruppo; infine, altri studiosi avallano l'ipotesi che Euclide sia stato esclusivamente il *referente scientifico* di alcuni matematici che continuarono a scrivere anche dopo la sua morte.

In ogni caso sono attribuiti a "Euclide" i tredici volumi degli *Elementi* (apparsi circa nel 300 a.C.) nei quali in particolare si stabiliscono le *DEFINIZIONI* che attribuiscono univocamente il significato degli oggetti geometrici di cui si parla (punti, rette, ...), le regole deduttive consentite e gli assiomi, o *POSTULATI*, che sono verità assunte senza dimostrazione.

I postulati sono cinque

Postulato 1. *Due punti A e B possono sempre essere uniti da una retta*.
Postulato 2. *Ogni segmento è prolungabile in una retta*.
Postulato 3. *Esiste sempre una circonferenza di raggio e centro fissato.*
Postulato 4. *Tutti gli angoli retti sono uguali.*
Postulato 5. *Se due rette intersecano una terza retta formando angoli interni la cui somma è minore di un angolo piatto, le due rette si incontrano* [equivalente alla possibilità di tracciare da un punto una parallela ad una retta data].

Un *TEOREMA* o *PROPOSIZIONE* è una proprietà dedotta dai cinque assiomi o da altre proprietà sempre da essi conseguenti.

Invogliati dal fatto che i primi ventotto teoremi sono dimostrati con l'uso soltanto dei primi quattro, molti matematici e filosofi si sono accaniti nel dimostrare la dipendenza del quinto postulato dai precedenti: la sfida è stata persa molti anni dopo quando Bolyai nel 1825 pubblicò la prova dell'indipendenza. La paternità del risultato fu contestata da Gauss che sostenne di averlo ottenuto (senza pubblicarlo) ben venti anni prima.

Investigare e scoprire delle proprietà geometriche seguendo le regole del gioco sopra definite significa occuparsi della geometria euclidea (o sintetica).

Vi sono anche altre geometrie, dette *non euclidee,* che partono da definizioni diverse e all'interno delle quali non sono rispettati alcuni degli assiomi euclidei: ad esempio, se consideriamo come ambiente la superficie sferica, definiamo come *punto* un punto della sfera e come *retta* una circonferenza di raggio massimo, due rette si intersecano sempre in due punti, contraddicendo il quinto postulato euclideo[2].

2. La rivoluzione cartesiana

Lo studio della geometria euclidea esclusivamente con metodi logico-deduttivi, se escludiamo qualche timido tentativo nel Medioevo, fu monopolizzante fino al diciassettesimo secolo, quando René Descartes, it. Cartesio, operò una "rivoluzione geometrica" destinata a lasciare una notevole impronta culturale.

Cartesio (1596-1650) nasce da una famiglia agiata e ha una vita densa di esperienze di vario tipo. Dopo i primi studi in un collegio gesuita, entra volontario nell'esercito e scrive opere sulla teoria delle fortificazioni, un compendio di musica, e meditazioni di carattere teologico. Compie vari viaggi (anche in Italia) e si dedica a studi di ottica, fisica e filosofia.

Nel 1635 scrive il celebre *Discorso sul metodo,* che viene accolto dalla critica con scarso entusiasmo. Diviene poi precettore della regina di Svezia. Muore di polmonite nel 1650. Nel *Discorso sul metodo* appare la sua geniale intuizione e ne viene indicata anche la curiosa genesi.

Data la sua salute alquanto cagionevole, Cartesio soleva trattenersi al mattino a letto meditando su questioni che lo appassionavano. Una mattina, improvvisamente, una mosca cominciò a svolazzare nella stanza: infastidito dal ronzio si pose la domanda di come avrebbe potuto perfettamente individuarla nello spazio. Pensò: se conoscessi la sua distanza dal pavimento e da due pareti della stanza l'avrei esattamente posizionata.

ERANO NATE LE COORDINATE CARTESIANE! E, più in generale, una nuova

2 Vedi http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm per una trattazione didattica più completa.

impostazione per lo studio della geometria: si poteva utilizzare l'algebra per l'indagine geometrica (e viceversa) usando il metodo di descrivere le proprietà geometriche (i luoghi geometrici) con equazioni nelle quali intervengono come incognite le coordinate cartesiane dei punti.

L'idea è di introdurre un sistema di riferimento (ortogonale) e associare ad ogni punto una terna di numeri reali (le coordinate del punto) che univocamente lo individuino. Se abbiamo a disposizione un luogo geometrico, le coordinate dei punti che appartengono a tale luogo devono soddisfare alcune equazioni e viceversa una (o più equazioni) che coinvolgano le incognite (x,y,z) può essere visto come un insieme di punti le cui coordinate soddisfano l'equazione o le equazioni date.

L'introduzione delle coordinate cartesiane pone dunque due ordini di problemi: uno consiste nel saper descrivere e tradurre un problema di carattere geometrico in uno di tipo algebrico, cercare di risolverlo e, tornando indietro, trovarne l'interpretazione geometrica ; l'altro di modellizzare geometricamente un problema di carattere analitico, risolverlo con strumenti geometrici, e trarne le conclusioni analitiche o algebriche.

È abbastanza immediato comprendere che il primo procedimento ha un carattere più meccanico e, probabilmente, dal punto di vista didattico è a volte meno stimolante per un discente. La strada è abbastanza segnata: si tratta, normalmente, di seguire una successione di passi nei quali la fantasia ha un ruolo meno preponderante di quello che interviene nella seconda problematica.

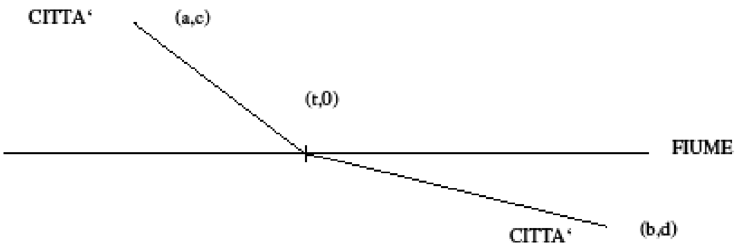
Spesso (purtroppo) nel curriculum scolastico si predilige proporre questioni relative al primo ordine di problemi piuttosto che al secondo ed in questo senso possiamo dire che *la geometria viene dimenticata* o almeno trascurata a favore della manualità di calcolo.

Terminiamo queste brevi riflessioni con un esempio molto semplice, ma nelle intenzioni suggestivo, di un problema analitico che può essere trattato con metodi geometrici.

Supponiamo di voler trovare il minimo della funzione

$$f(t) = (a-t)^2 + (b-t)^2 + c^2 + d^2$$

dove a, b, c, d sono costanti assegnate. Questo problema modellizza, ad esempio, il problema di conoscere dove posizionare il ponte affinché il percorso tra due città abbia lunghezza minima.



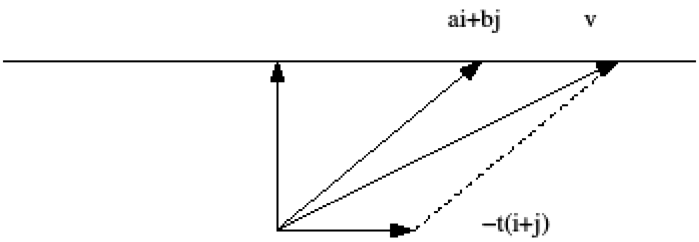
Ovviamente, essendo *c* e *d* costanti, è sufficiente calcolare il minimo della funzione

$$g(t) = (a - t)^2 + (b - t)^2$$

La quantità *g(t)* rappresenta (se *i* e *j* indicano una coppia di versori ortogonali) il modulo al quadrato del vettore

$$v = (a - t)i + (b - t)j = ai + bj - t(i + j)$$

Si tratta dunque di trovare, al variare di *t*, quando il vettore *v* assume lunghezza minima.



Dalla figura si nota che *v* è di lunghezza minima quando è ortogonale a *i+j*, ossia quando il prodotto scalare tra v e $i + j$ vale 0. Questa circostanza si ottiene quando

$$t = \frac{(a + b)}{2}$$

che rappresenta la soluzione del nostro problema iniziale.

Mario Landucci
Università di Firenze