Che cos'è la probabilità?

Antonio Moro

Dipartimento di Ingegneria civile, Università di Firenze

1. Premessa

Ci sono cose che tu, lettore di questo racconto, sai essere vere, e altre che sai essere false. Rimangono molte cose la cui verità o falsità non ti è nota. Rispetto a queste, sei in condizione d'incertezza.

Scrive Bruno De Finetti [2, p. 34]:

> Tutti e sempre ci troviamo – nei confronti di tutte o quasi le cose – in condizioni di incertezza.[...] Incertezza in ogni senso.
>
> Incertezza circa le situazioni di fatto, presenti e passate, [...] Incertezza nelle previsioni [...] Incertezza di fronte alle decisioni [...]

E continua:

> A tutti capita spesso di non contentarsi (o di non potersi contentare) di ciò. E quindi di andar oltre. E andar oltre correttamente significa entrare in quella che abbiamo detto logica della previsione. [2, p. 85]

Peter Bernstein sostiene che questo passaggio (ossia lasciare la logica del certo per adottare una logica di previsione) distingue migliaia di anni di storia da quelli che pensiamo essere i tempi moderni.

> Il passato è pieno di brillanti scienziati, matematici, inventori, tecnologi, e filosofi. Centinaia d'anni prima della nascita di Cristo, i cieli avevano le loro mappe, la grande biblioteca di Alessandria era in funzione e s'insegnava la geometria di Euclide. La domanda d'innovazione tecnologica militare era insaziabile come oggi. Carbone, ferro e rame erano al servizio degli uomini da millenni, viaggi e comunicazioni marcano i veri inizi della civilizzazione.
>
> L'idea rivoluzionaria che marca la frontiera tra i tempi moderni e il passato è l'addomesticamento del rischio: la percezione che il futuro è più di un ghiribizzo degli dei e che gli uomini e le donne non sono passivi di fronte alla natura. Fino a quel momento, il futuro era uno specchio del passato o l'oscuro dominio di oracoli e indovini che avevano il monopolio della conoscenza degli eventi futuri. [1, p. 1]

Dopo questa frase mi pare naturale invitare a una riflessione sulla quantità di oroscopi e indovini a disposizione, in Italia, tramite i mezzi di comunicazione di massa!

Per superare questo stato di cose bisognava inventare uno strumento per misurare l'incertezza, la probabilità appunto. Cercherò di raccontare, molto rapidamente, il percorso che ha portato all'odierno, onnipresente, utilizzo di modelli probabilistici nei più svariati settori delle attività umane.

Prima, ancora due parole sull'incertezza. Che dietro l'incertezza ci sia l'ignoranza, pare scontato. Ma forse non basta a spiegare l'infinita varietà delle cose incerte. Esistono il caso, l'aleatorietà, la fortuna, il destino, la "sorte" (che il Devoto – Oli, [4], definisce «forza impersonale che si immagina regolare, secondo un corso imprevedibile, le vicende umane»)?

Un'abilità nel valutare quote di scommessa in situazioni a rischio è di tutti; ha importanza per la sopravvivenza ed è parte della nostra eredità evolutiva. A un certo punto della storia dell'uomo, compare la relazione di causa-effetto che ha un alto valore di verità, è facile da insegnare e da imparare. Di qui, l'enfasi sulle "leggi di natura."

La conoscenza pratica è identificata con ristrette relazioni di causa-effetto con alto valore predittivo. La conoscenza rilevante per l'organizzazione sociale invece era "rivelata". Essa era basata sull'autorità, e non sulla verifica empirica. "Cose che accadono."

A questo punto mi sento di proporre quest'apologo di Schumacher - l'economista, non l'ex pilota di Formula 1!

> Quando l'Onnipotente creò il mondo e gli uomini perché lo abitassero, un'impresa che secondo la scienza moderna, prese molto tempo, posso ben immaginare che ragionasse nel modo seguente: «Se faccio tutto prevedibile, questi esseri umani, cui ho dato in dote cervelli piuttosto buoni, impareranno senza dubbio a prevedere tutto, e, da quel momento in poi, non avranno più motivo di fare qualcosa, perché riconosceranno che il futuro è totalmente determinato, e non può essere influenzato da alcuna azione umana. D'altro lato, se faccio tutto imprevedibile, essi scopriranno gradualmente che non c'è base razionale in qualsiasi decisione e, come nel primo caso, da allora in poi non avranno alcun motivo di fare alcunché. Perciò devo creare un misto dei due. Siano alcune cose prevedibili e altre non lo siano. Così gli uomini avranno anche il compito molto importante di scoprire quali sono le une e quali le altre. [11, p. 186]

Fermiamoci qui, altrimenti questo discorso rischia di allontanarci dal nostro obiettivo. Proviamo invece a inoltrarci nel sentiero che porta alla nozione moderna di probabilità.

2. Inizi

Per trovare uno strumento di previsione è utile avere a disposizione un "laboratorio", come ci ha insegnato Galileo. È sorprendente che il laboratorio per creare una matematica dell'incertezza fosse pronto da molto tempo, ma non sia stato utilizzato fino al Rinascimento, anzi addirittura fino alla metà del Seicento. Infatti, appena raggiunta la maturità, "homo sapiens" inventò qualcosa che, nel corso dei secoli, è stato definito vizio, crimine, piacere, magia, malattia, follia, debolezza, forma di sostituzione sessuale. Inventò il gioco d'azzardo! Di nuovo, mi vedo costretto a sorvolare sull'affascinante dibattito circa i motivi che stanno all'origine del gioco d'azzardo. Rinvio il lettore interessato al libro di Ian Hacking, [5].

Scrive Luciano di Samosata (124 a.C.):

> io ripensavo alla vita umana, che parmi come una lunga processione. Fortuna è il ceremoniere che ordina e distribuisce gli uffici e le vesti: ti piglia uno che le viene innanzi, lo veste da re, gli mette la tiara in capo, lo circonda di guardie, lo corona d'un diadema: sovra un altro getta una tonacella di servo: a chi dà un aspetto bello, a chi uno brutto e ridicolo, perché lo spettacolo dev'essere variato. [7]

Circa mille e seicento anni dopo, Nicolò Machiavelli nel *Principe* lascia alla Fortuna soltanto il 50%:

> Nondimanco, perché il nostro libero arbitrio non sia spento, iudico poter esser vero che la fortuna sia arbitra della metà delle azioni nostre, ma che etiam lei ne lasci governare l'altra metà, o presso, a noi.

Conclude Cerasoli: «Adesso ognuno può dire la sua: abbiamo da scegliere. Per quale percentuale la Fortuna è arbitra delle nostre azioni? Al 100% come affermava Luciano, al 50% come sostiene Nicolò o a un valore p, compreso tra lo 0 e il 100 %?».

I primi studi quantitativi conosciuti che riguardano questioni d'incertezza si riferiscono sempre al gioco dei dadi. Per esempio, alcuni commentatori della terzina di Dante[1]

> Quando si parte il gioco della zara,[2]
>
> Colui che perde si riman dolente,
>
> Ripetendo le volte, e tristo impara.

provano a calcolare il numero di modi con cui si possono ottenere i vari risultati.

Nel Cinquecento, un tentativo di dare una sistemazione a problemi di questo tipo si trova nel *Liber de Ludo Aleae* (*Libro sul gioco dei dadi*) di Gerolamo Cardano. Oynstein Ore, [8], dà un'affascinante ricostruzione della vita di Cardano, piena di interessi in campi diversi, tra cui la medicina, l'astrologia e la matematica. In quest'ultimo campo è famoso il suo scontro con Tartaglia riguardante la soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado. Il *Liber de Ludo Aleae* fu però pubblicato postumo nel 1663 e non si sa quale influenza abbia avuto sugli sviluppi della probabilità.

Cardano formulò un principio: che le puntate, in una scommessa "equa", dovrebbero essere in proporzione al numero di modi in cui ogni giocatore può vincere; e applicò questo principio per trovare le quote di scommesse per puntare sui vari risultati ottenibili con due o tre dadi.

Anche Galileo Galilei, con il suo *Sopra Le Scoperte de i Dadi*, contribuisce a chiarire un problema riguardante un gioco con tre dadi. Nelle parole di Galileo:

> ... ancor che il 9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quanto il 10 e l'11, per lo che di eguale uso dovriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che 'l 9 e 'l 12.

Galileo spiega il fenomeno enumerando le possibili combinazioni dei tre risultati che compongono la somma. Mostra che il 10 e l'11 possono comparire in 27 modi (sul totale di 216), mentre il 9 e i 12 possono comparire in 25 modi – il che spiega lo "svantaggio".

I lavori di Cardano e di Galileo sono sicuramente notevoli, ma la scintilla che dette inizio allo studio sistematico della probabilità fu fatta scoccare da un certo Cavaliere de Méré, scrittore, eminente figura della corte di Luigi XIV (il "Re Sole") e ardente giocatore d'azzardo. De Méré pose due problemi a Blaise Pascal, che era stato un bambino prodigio, avendo pubblicato un suo trattato sulle sezioni coniche a sedici anni e avendo inventato una macchina calcolatrice a diciotto. Al momento della richiesta di de Méré, la sua dimostrazione del peso dell'atmosfera lo aveva posto in prima fila fra gli scienziati dell'epoca. Pascal decise di prendere contatto con Pierre de Fermat, un colto giurista di Tolosa, che studiava matematica a tempo perso. Fermat perciò è stato chiamato il principe dei dilettanti, essendo in realtà uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

Il primo problema riguardava i risultati sui giochi di dadi. L'esperienza lo aveva portato a concludere che era più facile vincere scommettendo su almeno un 6 in quattro lanci di un dado rispetto a puntare su almeno una coppia di sei su 24 lanci di due dadi. Ore [9] racconta che le regole di scommessa di quei tempi suggerivano che, perché quattro ripetizioni fossero favorevoli per il verificarsi di un sei con un dado, per un evento sei volte più incerto, $6 x 4 = 24$ ripetizioni avrebbero dovuto essere sufficienti a una scommessa favorevole. Pascal e Fermat mostrarono, con un calcolo esatto, che ci volevano 25 lanci per ottenere una scommessa favorevole a una coppia di sei.

Il secondo problema era molto più difficile: era un vecchio problema, apparso nel libro di fra' Luca Pacioli *Summa de Arithmetica Geometria, Proporzioni et Proporzionalità*, stampato a Venezia nel 1494. Il problema riguardava la determinazione dell'equa divisione del premio in un torneo a punti che è interrotto per una qualche ragione. Questo problema è spesso indicato come il PROBLEMA DEI PUNTI.

Soluzioni ragionevoli, come quella di divider il premio proporzionalmente ai punti ottenuti al momento dell'interruzione, erano state proposte, ma non erano risultate soddisfacenti. Pascal e Fermat iniziarono una corrispondenza che contiene un nuovo modo di affrontare il problema.

In una lettera datata Mercoledì 29 luglio 1654, Pascal scrive a Fermat di aver ricevuto la sua soluzione, che trova molto brillante ecc., ma gli sembra che il metodo per ottenerla sia un po' "pesante".

Qual era la proposta di Fermat? Fermat comprese che era più equo guardare al futuro, invece che al passato, ossia considerare quanti punti mancano ai due giocatori per raggiungere la vittoria finale. Se, per ottener il premio, al giocatore A mancano due vittorie e al giocatore B ne mancano tre, allora i modi in cui il torneo può finire sono AA, ABA, BABA, BAA e BBAA. Però questi modi non sono "ugualmente possibili". Per evitare la difficoltà, Fermat estende il numero di modi, aggiungendo giochi fittizi, in modo che tutti i giochi abbiano la stessa lunghezza (quattro). Se elenchiamo tutti i possibili risultati del gioco esteso, si ha la tavola seguente:

AAAA	ABAA	BAAA	BBAA
AAAB	ABAB	BAAB	BBAB
AABA	ABBA	BABA	BBBA
AABB	BABB	ABBB	BBBB

Il giocatore A vince in tutti quei casi in cui ci sono almeno due A (11), e B vince nei casi con almeno tre B (gli altri 5 casi). Quindi Fermat conclude che il premio va suddiviso in 11/16 ad A e 5/16 a B.

Pascal continua la lettera scrivendo di aver trovato un metodo più rapido, basato sul seguente ragionamento: supponiamo che il premio sia 64 monete e che tale premio sia vinto da chi raggiunge tre vittorie nei singoli colpi.

Prendiamo il caso che al momento dell'interruzione il giocatore A abbia due vittorie e il giocatore B ne abbia una (2 a 1). Se giocassero un altro colpo e vincesse A, allora A avrebbe vinto tutto, mentre se vincesse B, andrebbero alla pari, (2 a 2), nel qual caso dividerebbero il premio finale metà per uno. Allora A dice: «*Je suis sur d'avoir 32 pistoles car la perte même me le donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurai; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sures*»[3]. Dunque ad A andrebbero 48 monete e a B ne andrebbero 16.

Altro caso: A ha due vittorie e B nessuna (2 a 0). Se giocassero un altro colpo e A vincesse, prenderebbe tutto, mentre se perdesse, si troverebbero nella situazione precedente (2 a 1). Il ragionamento di A diventa: sono certo di ottenere 48 monete e delle restanti 16 facciamo a metà. Con questo ragionamento, A prenderebbe 56 monete e B ne prenderebbe 8.

Infine, se A ha vinto un solo colpo e B nessuno (1 a 0)[4], al prossimo colpo, se A vincesse, la situazione sarebbe quella del caso precedente (2 a 0), mentre se perdesse andrebbe alla pari con B (1 a 1). A dice: «*Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles chi me sont sures, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32. reste 24; partagez don 24 par la moitié, prenez-en 112 et moi 12, qui, avec 32 fait 44* »[5], cosicché A riceverebbe 32 + 12 = 44 monete e B ne riceverebbe 20, in accordo con il risultato di Fermat.

Abbiamo visto come Pascal e Fermat arrivino per due strade molto diverse alla soluzione del problema dei punti. Il metodo di Pascal sviluppa un algoritmo ricorsivo (quindi facilmente realizzabile su un calcolatore) che è facile da generalizzare. Il metodo di Fermat, d'altro canto, consiste nel cambiare il problema in un problema equivalente per cui era facile usare tecniche combinatorie. Questa è una tecnica spesso usata in matematica! Vale la pena osservare che la questione della "uguale possibilità" porterà, nella riflessione successiva, a nuovi importanti concetti.

3. Valore atteso

Va notato che finora la parola "probabilità" non è ancora apparsa. In effetti, i metodi esposti tendono a stabilire qual è il valore equo di una scommessa; per esempio, riguardando i ragionamenti di Pascal e di Fermat, si nota come riducano il problema a una scommessa simmetrica in cui ogni giocatore ottiene una data quantità e prende per buono che le puntate debbano essere divise in parti uguali, calcolando quello che potremmo chiamare un valore atteso.

Il primo studio sistematico del concetto di "valore atteso" compare nel libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (*Sulla razionalità nei giochi di fortuna*), pubblicato da Christian Huygens nel 1657. Come Pascal, anche Huygens trova il valore atteso di una scommessa supponendo che la risposta sia ovvia per certe situazioni simmetriche e usa ciò per dedurre il valore atteso per situazioni generali. Procede per passi. Le prime tre proposizioni sono:

> 1. Se ho uguali possibilità di ottenere a o b, ciò vale per me quanto (a + b)/2.
>
> 2. Se ho uguali possibilità di ottenere a o b o c, ciò vale per me quanto (a + 6 + c)/3.
>
> 3. Se il numero di possibilità di ottenere a è p, e il numero di possibilità di ottenere b è q, supponendo sempre che ogni possibilità possa verificarsi in uguali modi, ciò vale per me quanto $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Oggi, questa è considerata la definizione di valore atteso, ma per Huygens le proposizioni precedenti richiedono una dimostrazione. Per dimostrare la Proposizione 1, Huygens introduce una lotteria con due giocatori che puntano ciascuno x monete e si accordano affinché il vincitore paghi la quantità a al perdente cosicché il vincitore riceve $2x - a$. Posto $2x - a = b$, la lotteria diventa equivalente al gioco dato e $x = (a + b)/2$.

La dimostrazione della Proposizione 2 è analoga. Huygens nota che questo risultato può essere esteso ad un qualunque numero di giocatori cosicché il valore del gioco con un numero finito di uguali possibilità è la media aritmetica dei premi.

Per dimostrare la Proposizione 3 sulla media pesata, Huygens ragiona così: consideriamo una lotteria con $p + q$ giocatori (incluso me), ciascuno dei quali punta x monete, Con q di essi mi accordo per ricevere b da ciascuno dei vincenti tra loro o pagare loro b se vinco, mentre con ciascuno dei restanti $p - 1$ giocatori mi accordo che ciascuno di loro che vinca paghi a me la quantità a e riceva da me la stessa quantità se vinco io. Pertanto io ho una possibilità su $p + q$ di ottenere la quantità $(p + q)\, x - qb - (p - 1)\, a$, q possibilità di ottenere b, e $p - 1$ possibilità di ottenere a. Questa lotteria è equivalente al gioco originale se $(p + q)\, x - qb - (p - l)\, a = a$, cosicché $x = (pa + q\, b) / (p + q)$.

Un vantaggio di questo metodo è di dare una giustificazione per il valore atteso, anche in casi in cui non è ragionevole supporre che l'esperimento sia ripetibile un gran numero di volte.

Un altro primitivo uso del valore atteso appare nel ragionamento di Pascal per convincere che una persona razionale dovrebbe credere nell'esistenza di Dio: la famosa scommessa di Pascal, [10].

> Esaminiamo allora questo punto, e diciamo: "Dio esiste o no?" Ma da qual parte

> inclineremo? La ragione qui non può determinare nulla: c'è di mezzo un caos infinito. All'estremità di quella distanza infinita si gioca un giuoco in cui uscirà testa o croce. Su quale delle due punterete? Secondo ragione, non potete puntare né sull'una né sull'altra; e nemmeno escludere nessuna delle due. Non accusate, dunque, di errore chi abbia scelto, perché non ne sapete un bel nulla.[...]
>
> Sí, ma scommettere bisogna: non è una cosa che dipenda dal vostro volere, ci siete impegnato. Che cosa sceglierete, dunque? Poiché scegliere bisogna, esaminiamo quel che v'interessa meno. Avete due cose da perdere, il vero e il bene, e due cose da impegnare nel giuoco: la vostra ragione e la vostra volontà, la vostra conoscenza e la vostra beatitudine; e la vostra natura ha da fuggire due cose: l'errore e l'infelicità. La vostra ragione non patisce maggior offesa da una scelta piuttosto che dall'altra, dacché bisogna necessariamente scegliere. Ecco un punto liquidato. Ma la vostra beatitudine? Pesiamo il guadagno e la perdita, nel caso che scommettiate in favore dell'esistenza di Dio. Valutiamo questi due casi: se vincete, guadagnate tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete, dunque, senza esitare, che egli esiste.

In queste parole si sono lette molte cose, ma una ci interessa in modo particolare: un primo esempio di quella che oggi è chiamata teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, che si è rivelata di grande utilità. Oggi questo modo di ragionare si è risultato importante nella diagnostica medica e nella gestione aziendale.

Proviamo a formulare la scommessa di Pascal in termini moderni. Abbiamo due possibili "stati di natura": "Dio esiste" e "Dio non esiste" e due "azioni" possibili: credere o non credere nell'esistenza di Dio. Indichiamo con p la probabilità che Dio non esista. La "perdita" della scommessa è riassunta nella tavola seguente:

	Dio non esiste	Dio esiste
	p	$1 - p$
Credo	$-u$	v
Non credo	0	$-x$

dove u, v e x sono opportuni valori. Ora per determinare qual è la strategia migliore, si dovrebbe fare il confronto fra i due valori attesi:

$$p(-u) + (1 - p)v \text{ e } p0 + (1 - p)(-x)$$

e scegliere il più grande dei due. In generale, la scelta dipenderà dal valore di p. Ma Pascal assume che il valore di v sia infinito e quindi la strategia di credere è migliore, qualunque sia la probabilità che si assegna all'esistenza di Dio.

Questo esempio è considerato l'inizio della moderna teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, che è importante parte della diagnostica medica e della gestione aziendale.

Huygens propone, alla fine del suo libro, cinque problemi che ebbero un'importante parte nello sviluppo della teoria matematica dell'incertezza, in quanto tutti i principali matematici si sentirono in obbligo di risolverli e di generalizzarli contribuendo così allo sviluppo della teoria. In particolare, un problema costituirà il nucleo centrale di moltissimi sviluppi teorici e pratici: il problema della rovina del giocatore.

Problema V

> A e B hanno 12 monete ciascuno e giocano con 3 dadi. Se viene 11, A dà a B una moneta, ma se viene 14 B dà una moneta ad A. Vince il gioco il primo che ottiene tutte le monete. Quali sono le possibilità di vittoria per A e per B?

4. Prime Applicazioni

Ma la probabilità s'interessa soltanto dei giochi d'azzardo (spesso vietati dalle autorità preposte)? Esaminiamo i titoli dei lavori usciti nei primi vent'anni del XVIII secolo relativi al tema:

1708. Pierre Rémond de Montmort, *Essai d'Analyse sur les jeux de hazards*[6],
1709. Nicholas Bernoulli, *De Usu Artis Conjectandi in Jure*[7].
1712. J. Arbuthnott, *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observed in the Births of both Sexes*[8].
1712. A. de Moivre, *De Mensura Sortis*[9].
I 713. James Bernoulli, *Ars Conjectandi*[10].
1717. Nicholas Bernoulli, *Solutio Generalis Problematis XV propositi a D. de Moivre, in tractatu de Mensura Sortis*[11].
1717. A. de Moivre, *Solutio generalis altera praecedentis Problematis*[12].
1718. A. de Moivre, *The Doctrine of Chances*[13].

Come si vede, un'esplosione! Appaiono i primi riferimenti a qualche applicazione alla giurisprudenza e alla demografia. Se poi non ci si limita ai titoli, ma si esaminano gli indici, si scoprono altre applicazioni interessanti per esempio alle assicurazioni: val la pena notare che assicurazioni e gioco d'azzardo sono due approcci diversi all'assunzione di rischi: la differenza sta nel fatto che i giocatori d'azzardo pagano per assumersi rischi non necessari, mentre gli acquirenti di assicurazioni pagano per evitare le conseguenze di rischi necessari.

Premunirsi contro le avversità ha un prezzo da oltre quattromila anni. I Sumeri prima, e poi i Babilonesi, per le carovane, Atene per il commercio marittimo, avevano messo in pratica sistemi assicurativi per le merci trasportate. Venezia, Genova, Barcellona dal XIV secolo e, a ruota, tutta l'Europa, avevano sviluppato un sistema vicino alla scommessa ordinaria.

I contratti dicono: «*nel caso, e Dio non voglia, che succedesse alla [barca] qualcosa di male in seguito al rischio di Dio, dei pirati e degli incidenti dovuti al maltempo*» ai proprietari di imbarcazioni veniva prestata un'ingente somma che era poi rimborsata con gli interessi, a seconda del tragitto, se la barca arrivava a destinazione.

Solo dal Seicento abbiamo un modo di calcolare il giusto prezzo di un rischio utilizzando il "principio di equità" basato sul valore atteso.

Un personaggio chiave in questa direzione è John Graunt, che nel 1662 pubblica *Observations Made upon the Bills of Mortality*[14]. La citazione che segue mi pare un manifesto della nascita di una nuova scienza: la Statistica[15]:

> Ora avendo (non solo per quale accidente) impegnato i miei pensieri sui Bollettini dei Decessi, ed essendo riuscito a ridurre molti grandi e confusi Volumi a poche Tavole chiare, e ridotto le Osservazioni da come naturalmente fluiscono da essi a pochi succinti Paragrafi, senza lunghe serie di magniloquenti Deduzioni, …

Indagini sulle persone e le proprietà erano state eseguite fin dai tempi più antichi a scopi fiscali e militari. Nella Roma repubblicana i membri e le proprietà di ogni famiglia erano registrati ogni cinque anni. Augusto estese il censimento all'intero impero romano. Con la sua caduta, il censimento scomparve; regolari censimenti a copertura di un intero stato nazionale non furono ripresi, di fatto, fino agli inizi del XVIII secolo. Nel Medioevo e nel Rinascimento, indagini venivano svolte in modo intermittente, prevalentemente per ragioni fiscali, come il Domesday Book del 1086 in Inghilterra e l'estesa indagine fatta a Firenze nel 1427.

Ma ritorniamo a Graunt. Partendo dai Bollettini dei decessi tenuti nelle parrocchie di Londra dal 1603, fece stime sulla popolazione di Londra e fornì inoltre i primi dati sulla mortalità, per esempio quelli nella tavola seguente.

Età	Sopravvissuti
0	100
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1

Come osserva Hacking [5], Graunt apparentemente costruì questa tavola supponendo che dopo l'età di 6 anni ci sia una frequenza costante (5/8) di sopravvivere per un altro decennio. Chiaramente, un tasso di mortalità costante non è accettabile durante tutto il periodo di vita di un uomo e poco dopo Halley (l'astronomo della cometa) fornì tavole più realistiche sotto questo aspetto.

Un vitalizio assicura una certa quantità di denaro durante un periodo di n anni. Per determinare il valore di un vitalizio si ha bisogno solo di conoscere l'appropriato tasso di interesse che può identificarsi con il valore atteso della durata di vita del compratore. Pertanto il lavoro di Huygens che introduce il valore atteso e il lavoro di Graunt e Halley nel determinare le tavole di mortalità portò a un metodo più razionale per prezzare i vitalizi.

Questa fu una delle prime serie applicazioni del ragionamento probabilistico fuori dalle case da gioco. Vale la pena ricordare che proprio in quegli anni, esattamente nel 1668, un certo Edward Lloyd, barista nel porto di Londra, fondò la prima compagnia di assicurazioni destinata a durare fino ai nostri giorni.

5. Probabilità

Avrete notato che fino a questo punto la parola «probabilità» non è ancora comparsa. In effetti, il termine appare in Pascal, nei medesimi anni, ma in un tutt'altro contesto. Pascal critica l'applicazione che i casuisti gesuiti fanno della «massima delle probabilità»: si è obbligati in coscienza ad osservare solo i precetti che sono certi nella loro formulazione e nella loro promulgazione, e quindi «basta il parere probabile di un direttore spirituale competente per ritenersi esenti dal dovere di soddisfare un precetto». Oggi saremmo inclini a tradurre il dibattito seicentesco sul probabilismo morale in termini di logica delle norme.

Dobbiamo inoltre mettere in chiaro che l'ambiguità delta parola «probabilità» durante la seconda metà dal Seicento è assai significativa. Da una parte, essa dà a intendere che le due nozioni di «probabilità» e di «casualità» (*chance*) si siano sviluppate in modo autonomo e indipendente; dall'altra, dà a intendere che l'idea di «probabilità» si trovi al centro di due diverse costellazioni concettuali in due epoche successive, la prima dall'Antichità classica fino al Rinascimento incluso, la seconda dal Seicento fino ai nostri giorni.

La considerazione del probabile ha una duplice origine: l'incerto e il fortuito. Naturalmente, incertezza e casualità hanno stretti collegamenti. Siamo particolarmente incerti, davanti al caso, perché esso è imprevedibile.

Peraltro, la prima cosa da affermare è che, presso i Greci, il termine «probabile» designa un attributo delle opinioni, contrariamente a quanto riguarda la scienza o sapere teorico (*episteme*), che ha per predicato proprio l'universale certezza, perché l'universalità ha il suo fondamento nella necessità. Quasi sempre potremmo tradurre «probabile» con «plausibile».

Il profilo della probabilità che abbiamo appena delineato è ben diverso da quello moderno, secondo il quale «probabile» è l'attributo di un evento, e non di un enunciato. Si potrebbe obiettare che la distinzione è speciosa, giacché molti enunciati hanno la funzione di indicare o di descrivere eventi.

Certo, per i moderni come per gli antichi, la «probabilità» si attribuisce a eventualità future, e poco importa se per eventualità viene inteso un enunciato relativo a un fatto parzialmente indeterminato, oppure il fatto stesso. D'accordo, ma ciò che importa nel moderno calcolo delle probabilità è che le eventualità considerate siano enumerabili. E se queste eventualità sono enumerabili, abbiamo buone possibilità di controllare se sono anche equipossibili. La considerazione moderna delle probabilità non appartiene più alla logica del plausibile, bensì all'analisi combinatoria che fornisce le chiavi per la corretta enumerazione delle eventualità, non le regole relative alle loro permutazioni e sostituzioni. Sulla base dell'analisi combinatoria, la logica del probabile si trasforma in calcolo delle probabilità.

Per i nostri scopi è sufficiente distinguere due tipi di probabilità: OGGETTIVA e SOGGETTIVA.

La probabilità OGGETTIVA (o *statistica*) è usata per descrivere proprietà di esperimenti come i giochi d'azzardo e per descrivere eventi casuali in popolazioni, come la possibilità della nascita di un maschio o la possibilità di morire a una certa età. Tali probabilità sono derivate da considerazioni di simmetria o stimate da frequenze relative. Basata su un gioco di fortuna idealizzato con un numero finito di esiti ugualmente possibili, la probabilità CLASSICA è definita come il rapporto tra il numero di esiti favorevoli e il numero totale di esiti.

La probabilità SOGGETTIVA, (o *personale*, o anche *epistemica*) è usata per misurare il grado di fiducia in una proposizione la cui evidenza non ha bisogno d'essere di natura statistica. Tali probabilità fanno riferimento alla nostra imperfetta conoscenza e quindi connesse solo indirettamente alle cose o agli eventi su cui l'affermazione è fatta. Alcuni filosofi considerano la probabilità epistemica come una misura della forza di una relazione logica tra due proposizioni, ossia come una relazione più debole di quella di un'implicazione logica. Forse il primo a mettere in chiaro questa distinzione tra i due tipi di probabilità è stato James Bernoulli nella Parte 4 del suo libro *Ars Conjectandi* (1713).

Da un punto di vista matematico, tuttavia, non è necessario o desiderabile definire esplicitamente la probabilità. Seguendo la procedura assiomatica, [6], la probabilità è una nozione non definita, un numero reale compreso tra 0 e 1 soddisfacente certi assiomi (regole di calcolo) da cui si sviluppa per deduzione il calcolo delle probabilità. Da questo punto di vista ogni interpretazione della probabilità è ammissibile se è coerente con gli assiomi.

Dobbiamo a Bernoulli l'importante distinzione tra probabilità che possono essere calcolate a priori (deduttivamente, da considerazioni di simmetria) e quelle che possono essere calcolate solo a posteriori (induttivamente, da frequenze relative).

Un'altra nozione importante è quella di PROBABILITÀ CONDIZIONALE, che fu usata molto prima di essere formalmente definita. Pascal e Fermat considerarono il problema dei punti che riformuliamo come: perché A ha vinto m giochi e B ne ha vinti n, qual è la probabilità che A vinca il torneo? Questo è chiaramente un problema di probabilità condizionale.

Un altro problema di Huygens è il seguente: tre giocatori, A, B e C, mettono 12 palline, di cui 4 sono bianche e 8 sono nere, in un'urna. A è il primo ad estrarre, poi B e poi C; il vincitore è colui che estrae per primo una pallina bianca. Qual è il rapporto delle loro possibilità di vittoria?

Abraham de Moivre pubblica nel 1718 *The Doctrine of Chances* (La dottrina delle possibilità), preceduto nel 1711 da *De Mensura sortis seu de probabilitate eventum in ludis a casu fortuito pendentibus* (Sulla misura della sorte, ossia delle probabilità di eventi in giochi dipendenti da casi fortuiti). Nell'opera del 1718 sono chiarite ed enunciate le nozioni d'indipendenza e dipendenza statistiche, come segue:

> *Due eventi sono indipendenti, quando non hanno connessione l'uno con l'altro e l'accadere di uno non influenza l'accadere dell'altro.*
>
> *Due eventi sono are dipendenti, se sono così connessi tra loro che la probabilità di accadere di uno qualunque di essi è alterata dall'accadere dell'altro.*

De Moivre usò il meccanismo di estrazione (campionamento) con e senza rimpiazzo, per illustrare che la probabilità che due eventi indipendenti accadano entrambi è il prodotto delle loro probabilità, mentre per eventi dipendenti la probabilità che entrambi accadano è il prodotto della probabilità che uno di essi accada per la probabilità che l'altro debba accadere, quando si consideri il primo come accaduto.

6. Legge dei Grandi Numeri

La Legge dei Grandi Numeri fu dimostrata per primo dal matematico svizzero Giacomo Bernoulli nella parte IV della sua *Ars Conjectandi.* Come spesso capita, tale dimostrazione è molto più complicata di quella che si dà oggi, basata su una disuguaglianza dovuta al matematico russo Chebyšev.

Supponiamo che una scatola contenga R palline rosse e V verdi. Se si compiono n estrazioni con rimpiazzo, la probabilità di estrarre una pallina verde in ciascuna di esse è data da

$$p^{*}=V/(R+V).$$

Bernoulli mostra che tende a zero la probabilità che il rapporto $f(n) = N(n)/n$ – del numero $N(n)$ di palline verdi estratte sul totale delle estrazioni (ossia la frequenza osservata) – differisca da p^* quando n diventa grande (tende all'infinito).

Perché questo risultato è importante? Perché mostra che una probabilità fisicamente reale, come p^*, può essere stimata con la frequenza empirica osservata in una successione di prove ripetute indipendenti (ossia sotto le stesse condizioni).

Tale Legge dei Grandi Numeri oggi è detta "debole". Immaginiamo milioni di sperimentatori che compiono l'esperimento. Con n grande, la stragrande maggioranza otterrà una frequenza empirica vicina a p^*. Ma cosa si può dire di un singolo sperimentatore? Parlando in termini moderni, il problema di Bernoulli era proprio questo: stimare la probabilità incognita p che accada un dato evento. Per stimare p, si usa la frazione $f(n)$ del numero di volte in cui l'evento si è verificato su una serie (finita) di n esperimenti ripetuti nelle stesse condizioni.

Si noti che $N(n)/n$ è una media di esiti individuali, perciò la Legge dei Grandi Numeri è spesso chiamata "legge delle medie". Colpisce il fatto che si possa partire con un esperimento su cui poco si può dire in termini di previsione e, prendendo medie, si ottenga un esperimento in cui l'esito può essere previsto con un alto grado di certezza.

Nell'*Ars Conjectandi*, Bernoulli fornisce ai lettori una lunga discussione sul significato del suo teorema insieme a molti esempi, alcuni dei quali sono elementari – come stimare la proporzione di palline bianche in un'urna che contiene un numero incognito di palline bianche e nere. Fornisce inoltre una vivace discussione sull'applicabilità del suo teorema per stimare la probabilità di morire di una particolare malattia, di differenti situazioni meteorologiche ecc.

Parlando del numero di prove necessarie per emettere un giudizio, Bernoulli osserva che "l'uomo della strada" crede nella "legge delle medie".

> Non sfugge ad alcuno che per giudicare in questo modo circa un evento non è sufficiente usare una o due prove, ma occorre un gran numero di prove. Talvolta gli uomini più stupidi— per natura o mancanza di istruzione — danno per certo che più osservazioni si fanno e minore è il pericolo di sbagliare.

In termini più moderni, questo è l'errore del giocatore d'azzardo il quale ritiene che, più prove si fanno, più diventa probabile che esca il risultato desiderato!

Un altro personaggio entra in gioco: Thomas Bayes. Ministro presbiteriano, Bayes si occupò di matematica della probabilità. I suoi interessi matematici lo portarono ad essere eletto alla Royal Society nel 1742, anche se nessuno dei suoi risultati fu pubblicato in vita.

Il lavoro cui deve la sua fama è un breve saggio: *An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances*[16] pubblicato nel 1763. In questo lavoro, Bayes passa in rassegna alcuni dei concetti basilari della probabilità e poi considera un nuovo tipo di problemi che richiedono una probabilità "inversa", ossia l'idea di calcolare la probabilità di una causa (o di un'ipotesi) dato un effetto (o l'evidenza disponibile).

Per approfondire il problema di Bernoulli, Bayes partì dal supporre che la probabilità p di successo sia a sua volta determinata da un fenomeno aleatorio. In effetti, pensò di scegliere a caso (ossia con uguale probabilità) un valore per p tra 0 e 1. Senza conoscere questo valore si compiono n prove di Bernoulli (ossia prove indipendenti con la stessa probabilità) in cui si osservano m successi. Bayes dette una soluzione al problema di trovare la probabilità condizionale che la probabilità incognita p sia compresa tra a e b con $0 \leq a \leq b \leq 1$, dato che si sono ottenuti m successi su n prove.

Bayes voleva mostrare la tale probabilità condizionale si concentrava intorno al valore vero di p, ossia cercava di risolvere un problema inverso. Al di la della difficoltà di calcolo incontrate, il suo lavoro fu il primo di una serie di studi portati avanti da Laplace, Gauss, e altri grandi matematici. Essi affrontarono questo problema in termini di errori nelle misure astronomiche. Se, infatti, un astronomo conoscesse il vero valore di una distanza e la natura dell'incertezza sugli errori causati dai suoi strumenti di misura, sarebbe in grado di dare una valutazione (probabilistica) delle sue misurazioni. Nella pratica, tuttavia, ci si deve confrontare con un problema inverso: il ricercatore conosce i valori delle misure effettuate e la natura degli errori casuali, e vorrebbe fare inferenze sul valore vero della distanza.

La determinazione di probabilità inverse è fondamentale per la statistica e all'origine di un paradigma statistico importante che va sotto il nome di analisi bayesiana, assicurando eterna fama a Bayes per il suo breve saggio.

6. Appare la curva a campana

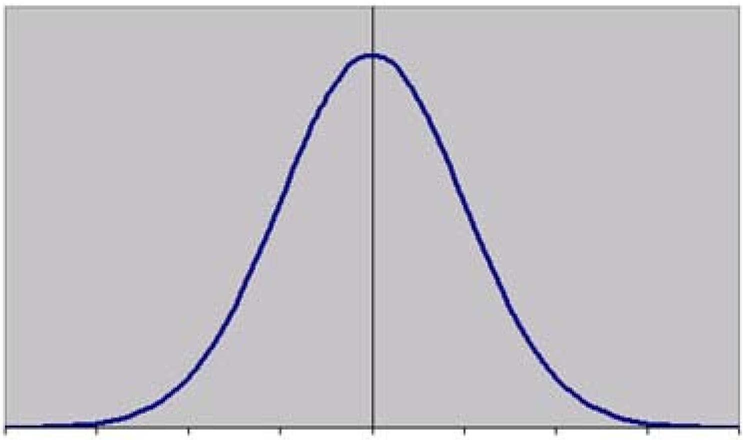
Facciamo un passo indietro nel tempo, per presentare un risultato "centrale" nel calcolo delle probabilità dovuto ad Abraham de Moivre e apparso come appendice del suo libro, *The Doctrine of Chances* [4].

De Moivre passò tre anni (dai 18 ai 21) in una prigione francese perché Protestante Ugonotto. Appena liberato, lasciò la Francia per l'Inghilterra, dove lavorò come tutore di giovani nobili. De Moivre frequentava i caffè di Londra e qui iniziò il suo lavoro sulla probabilità calcolando le quote di scommessa per giocatori d'azzardo. Incontrò anche Newton in uno di questi caffè e divenne suo amico; infatti, il suo libro è dedicato a Newton.

La *Doctrine of Chances* fornisce le tecniche per risolvere un'ampia varietà di problemi sui giochi d'azzardo. In mezzo a tali problemi de Moivre modestamente introduce:

> *Un Metodo di approssimazione della somma dei termini del Binomio* $(a + b)^n$ *sviluppato in Serie, da cui sono dedotte alcune regole pratiche per stimare il Grado di Consenso che deve essere dato agli Esperimenti* [3. p. 243].

Questo metodo produce una curva che approssima i dati dalla forma caratteristica di una campana



la cui espressione analitica è

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si noti che essa contiene tutti i più famosi numeri irrazionali ($\sqrt{2}, e, \pi$). Forse è per questo che la curva è diventata un'icona culturale, oltre che un importante concetto matematico.

La curva a campana ha un certo numero di semplici proprietà geometriche, alcune delle quali furono immediatamente notate da de Moivre: la curva è simmetrica rispetto all'origine, dove ha un punto di massimo (che in seguito sarà chiamato "moda"). Inoltre se dal punto di massimo si scende verso destra (o sinistra) si trova un punto di flesso, dove cambia la pendenza della curva stessa.

Un altro grande padre della probabilità ha legato il suo nome alla curva a campana: Pierre Simon, marchese di Laplace. Il suo trattato *Théorie analytique des probabilités* del 1812 costituisce il primo trattato matematico del calcolo delle probabilità: riassume la conoscenza probabilistica precedente e introduce nuovi e potenti metodi matematici per trattare le questioni di probabilità. Inoltre, il tratta di Laplace contiene la descrizione della curva a campana come curva rappresentativa della distribuzione di errori casuali.

Alla metà dell'Ottocento, il matematico belga Quetelet mostrò empiricamente che la curva a campana si presentava nell'analisi di molti tipi di dati reali, e dette anche un metodo per adattare la curva a insiemi di dati. Laplace aveva dimostrato molto prima che la somma di molte grandezze aleatorie indipendenti e con la stessa legge di probabilità ha una legge di probabilità approssimata dalla curva a campana. Galton sapeva che certi tratti fisici in una popolazione apparivano avere approssimativamente lo stesso andamento. Scrive Galton (citato in[13]):

> Per prima cosa lasciatemi mettere in evidenza che Quetelet e tutti gli autori che hanno seguito il suo percorso hanno sottovalutato questo fatto... sebbene le caratteristiche di piante e animali si conformino a tale legge, la ragione per cui ciò accade resta totalmente inesplicata. L'essenza della legge è che differenze dovrebbero complessivamente essere dovute alle azioni collettive di un esercito di trascurabili influenze indipendenti in varie combinazioni [...] Ora i processi dell'ereditarietà [...] non sono influenze trascurabili, ma molto importanti [...] La conclusione è [...] che i processi di ereditarietà devono lavorare armoniosamente con la legge delle deviazioni, ed essere essi stessi in un certo senso conformabili a essa.

Nel corso del tempo la curva a campana ha assunto vari nomi, a seconda del problema trattato. Perciò è stata detta anche «legge degli errori», o «legge della frequenza di errori». Altri nomi sono legati a nomi di studiosi, come «seconda legge di Laplace» e «legge gaussiana». Mai è chiamata «legge di de Moivre»[18]. Oggi il nome più usato per indicarla è quello di «legge normale». Pare che questa terminologia sia stata usata da Francis Galton in *Typical laws of heredity*[19] (1877). Galton ha avuto molta influenza sullo sviluppo della Statistica in Gran Bretagna e, attraverso i suoi 'discendenti' Karl Pearson e R. A. Fisher, sulla Statistica mondiale. Galton non spiega perché usi il termine "normale", ma il senso potrebbe essere stato di conformarsi a una "norma".

7. Vecchi problemi e nuovi sviluppi

Sulla rivista *Commentarii Academiae Scientiae Imp. Petropolitane*, nel 1738, Daniele Bernoulli (1700-1782), nipote di Giacomo, pubblica l'articolo *Specimen Theoriae novae de mensura sortis*, dove presenta il Paradosso di San Pietroburgo: supponiamo di continuare a lanciare una moneta "onesta" (ossia con probabilità uguale di "testa" e di "croce") finché non vine "testa", Se ciò avviene all'r-simo lancio il giocatore riceve 2^r

monete. Un po' di riflessione fa intuire che il guadagno atteso è infinito e la legge dei grandi numeri è inapplicabile! Per affrontare questo paradosso, Daniele Bernoulli propose il concetto di "speranza morale", che oggi è ampiamente usato in economia sotto il nome di "utilità attesa".

Un nuovo tipo di problemi nasce con Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon: se lanciate a caso un ago (un segmento) di lunghezza l su un piano, su cui siano tracciate rette parallele a distanza d l'una dall'altra, con $l < d$, qual è la probabilità che l'ago intersechi una delle rette? Possiamo prendere come insieme dei casi possibili il rettangolo con i lati $(0, l)$ e $(0, \pi)$ e l'insieme dei casi favorevoli è un sottoinsieme di questo rettangolo. Nasce l'idea di calcolare la probabilità richiesta come rapporto tra l'area del sottoinsieme dei casi favorevoli e l'area del rettangolo dei casi possibili. È nata la "probabilità geometrica"! I calcoli mostrano che p risulta essere data da $2l/(\pi d)$.

Non molto tempo dopo, si cercò di calcolare π usando la frequenza f dell'evento relativo all'ago di Buffon, come stima della probabilità e invertendo la formula vista sopra:

$$\pi \approx \frac{2l}{fd}$$

Abbiamo un primo tentativo di quello che in seguito sarà chiamato "metodo MonteCarlo".

Nel 1809 Carl Friedrich Gauss scrive la *Theoria motus corporum coelestium*[20]. Per studiare gli errori di osservazione in astronomia s'imbatte in quella curva a campana, che poi prenderà il suo nome, ma che era già stata scoperta da de Moivre.

Il primo gennaio 1801, l'astronomo palermitano Piazzi aveva scoperto un nuovo pianeta, che ruotava intorno al Sole in un'orbita compresa tra quelle di Marte e di Giove: Cerere. Poche settimane dopo, Cerere sparì: la sua orbita lo stava conducendo dall'altro lato del sole, dove la sua debole luce finiva per essere ingoiata dal bagliore solare, smarrito nella moltitudine di stelle del firmamento. Circa un anno dopo l'avvenimento, un giovane matematico tedesco disse dove si doveva puntare il telescopio per ritrovare Cerere: Gauss aveva individuato (per via probabilistica) un ordine (una regolarità) dove gli altri avevano visto solo una quantità (peraltro piccola) di dati relativi alla traiettoria del pianeta, registrati nel momento in cui esso era ancora visibile, e stabilì un metodo (prolungamento di una traiettoria data) grazie al quale sarebbe stato possibile trovare sempre Cerere in qualsiasi data futura.

8. Entrano in gioco la Fisica e la Logica

Siamo arrivati alla metà dell'Ottocento e la ricerca fisica non ha ancora preso molto in considerazione la probabilità, sebbene un passo fondamentale sia stato fatto dal solito Laplace. La domanda è: risulta possibile una conoscenza certa di una parte dell'universo se non si conosce l'universo nella sua totalità? La risposta di Laplace è che ciò non è possibile e che l'unica conoscenza possibile sia quella probabilistica.

Un passo decisivo si verifica quando viene scoperto il fenomeno della diffusione di un gas[21]. Una bombola piena di gas è messa in comunicazione con un'altra vuota. Dopo qualche istante si scopre che il gas si è distribuito circa a metà nelle due bombole. Come si spiega questo fenomeno?

Nel 1854 scriveva James Clerk Maxwell:

> È ben noto che la conoscenza si basa sulle regole del corretto ragionamento. Tali regole sono, o dovrebbero essere, contenute nella Logica; ma quest'ultima tratta soltanto cose che sono certe, impossibili o completamente dubbie, nessuna delle quali (per fortuna) ci interessa. Perciò la vera logica di questo mondo è il calcolo delle probabilità, il quale tiene conto del concetto di probabilità che è, o dovrebbe essere, nella mente di ogni uomo ragionevole.

Il caso volle che in quello stesso anno (1854, a duecento anni dal carteggio tra Pascal e Fermat) venisse alla luce *An Investigation on the laws of thought*[22] di George Boole, nella cui seconda parte sono contenuti i fondamenti della logica probabilistica, poi sviluppata, qualche anno più tardi (1866) da John Venn, nella sua *The logic of chance*[23].

Nonostante i progressi raggiunti dal calcolo delle probabilità, al convegno mondiale dei matematici tenutosi a Parigi nel 1900, David Hilbert, nella sua famosa enumerazione dei più rilevanti e non risolti problemi della matematica, pose la questione dei fondamenti del calcolo delle probabilità.

Un altro fenomeno fisico che ha avuto (e continua ad avere) una notevole influenza sulla probabilità è il "moto browniano": l'incessante movimento di particelle leggere (per esempio, polline) che si trovino in sospensione su un fluido (per esempio, acqua, ma il fenomeno è presente anche nelle particelle di inquinante presenti nei fumi di scarico). Come mi ha detto un amico probabilista, il moto browniano è una gemma della fisica moderna e allo stesso tempo è una scoperta botanica la cui teoria matematica ha avuto origine nelle scienze sociali.

Infatti, nel 1828 il botanico inglese Robert Brown pubblicò un fondamentale lavoro su tale fenomeno, tra l'altro dimostrando come tutte le precedenti spiegazioni fossero inconsistenti. Dare una spiegazione era però difficile perché il fenomeno mette in crisi le leggi della meccanica di Galilei, di Newton, di Lagrange e di Laplace, in quanto apparentemente manca la forza che produce il moto. Bisognerà attendere la nascita della Meccanica Statistica (con i contributi fondamentali oltre che di Maxwell, di Ludwig Boltzmann e J. Willard Gibbs, perché si capisse che la forza che produce il moto è data dagli urti che le particelle subiscono dalle molecole del fluido, che sono in incessante movimento a temperatura ambiente.

In uno dei "mitici" lavori del 1905, Einstein formula un modello matematico di *diffusione* per il moto browniano, che, forse, si basa sull'analogia che Louis Bachelier aveva proposto tra il moto browniano e le fluttuazioni dei prezzi – opzioni sulle azioni in Borsa [1] nella sua tesi di dottorato sulla "Teoria della Speculazione" (pubblicata nel 1900). Bachelier è considerato un pioniere nello studio della finanza matematica e della teoria dei processi aleatori.

9. A mo' di conclusione

Siamo arrivati alle soglie del secolo scorso, il Novecento. Come dicevo all'inizio, la nostra esistenza è immersa nell'incertezza, ma questo fatto è spesso trascurato e molte delle attitudini dell'uomo verso il caso sono basate sulla magia, mentre le nostre tradizionali organizzazioni sociali e le loro strutture di potere preferiscono sostenere le illusioni della certezza. Queste sono probabilmente le principali ragioni per un'insufficiente valutazione della casualità e dei rischi che hanno conseguenze sulla salute e i comportamenti sociali.

La logica predominante sembra essere quella di trattare come equivalenti gli eventi:

- Qualcuno dovrà pur vincere il primo premio della Lotteria. (Evento certo.)
- Il mio biglietto vincerà il primo premio della Lotteria. (Evento di probabilità quasi zero.)

Anche nel discorso scientifico capita che giochi un ruolo importante la "casualità pura", un residuo dell'Ottocento. «Tutte le possibilità sono ugualmente possibili» è un caso molto particolare cui la Natura raramente si conforma.

I fenomeni casuali reali sono pieni di dipendenze statistiche spesso difficili da capire e modellizzare. Un ragionevole approccio quantitativo all'incertezza dovrebbe essere insegnato già dai primi anni scolastici, anche se il ragionamento probabilistico corretto non è facile da imparare per via di risultati contro-intuitivi e addirittura paradossali che si possono ottenere.

In ogni caso, la vita quotidiana è ormai piena di metodi probabilistici e statistici per l'analisi di fatti medici, biologici e sociali. Qualche volta sorge il problema se l'uomo possa essere trattato come una particella; io ho qualche riserva a pensare le persone come elementi di una meccanica statistica, anche se, per capire certi comportamenti di massa, questo metodo funziona notevolmente bene.

Il metodo statistico non compie scoperte sostanziali in altri campi; suggerisce, aiuta a confermare, e aiuta nei processi decisionali. Il caso opera a tutti i livelli di scala – e ciascun livello può richiedere modelli diversi: molti fenomeni che appaiono deterministici a una scala possono essere il risultato di un gran numero di "prove" casuali a una scala più piccola, come per esempio accade nei fenomeni di ebollizione, nella spettroscopia di massa, nella deriva genetica, nei cambiamenti delle attitudini e delle pratiche sociali.

Un'altra situazione si ha notando una strana correlazione: quella tra NON-lineare e NON-certo. In effetti, ci sono ormai molti esempi di fenomeni descritti da modelli deterministici non lineari che producono risultati incerti, legati, per esempio, alla sensibilità rispetto alle condizioni iniziali: i cosiddetti fenomeni caotici.

Il metodo probabilistico offre modelli cognitivi per fenomeni incerti – dalla comprensione del sub-atomico della meccanica quantistica alle macro-strutture dell'universo.

Una ragionevole accettazione della casualità è alla base per una filosofia di vita che appare meno deprimente della sua alternativa più competitiva: un universo deterministico.

La scienza della quantificazione dell'incertezza suggerisce che il caso è riconducibile a un'analisi razionale e a un qualche grado di controllo, già largamente riconosciuto in Ingegneria, Tecnologia e Scienze applicate con incursioni crescenti nelle Scienze sociali.

Vorrei terminare citando Albert Einstein, che nel 1926 scriveva a Max Born:

> Tu ritieni che Dio giochi a dadi col mondo; io credo invece che tutto ubbidisca a una legge, in un mondo di realtà obiettive che cerco di cogliere per via furiosamente speculativa. Lo credo fermamente, ma spero che qualcuno scopra una strada più realistica – o meglio, un fondamento più tangibile – di quanto non abbia saputo fare io. Nemmeno il grande successo iniziale della teoria dei quanti riesce a convincermi che alla base di tutto vi sia la casualità, anche se so bene che i colleghi più giovani considerano quest'atteggiamento come un effetto di sclerosi[24].

NOTE

[1] *Divina Commedia,* Purgatorio, Canto VI, 1-3

[2] *Zara* è un termine proveniente dall'arabo per indicare un gioco di dadi. Il suo corrispondente latino era *alea*. Da *zara* deriva poi il francese *hazard* e infine l'italiano *azzardo*.

[3] Io sono sicuro che avrò 32 monete, anche se perdo il prossimo colpo; delle 32 che restano, forse le avrò, forse le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo quindi queste 32 monete a metà, e mi darete, oltre a queste, le mie 32 che mi sono assicurato.

[4] Questo è il caso esaminato da Fermat.

[5] Se non volete giocare il (prossimo) colpo, datemi 32 monete, che mi sono certamente dovute, e dividiamo il resto di 56 a metà. Da 56 togliete 32, restano 24; dividete dunque 24 a metà, prendetene 12 e io 12, che, insieme alle 32, fa 44.

[6] *Saggio sull'analisi dei giochi d'azzardo.*

[7] *Sull'uso dell'arte della congettura nel Diritto.*

[8] *Un Argomento a favore della Divina Provvidenza tratto dalla Regolarità costante osservata nelle Nascite di ambo i Sessi.*

[9] *Sulla Misura della Sorte.*

[10] *Arte della Congettura.*

[11] *Soluzione generale del Problema XV proposto da de Moivre nel trattato sulla Misura della Sorte.*

[12] *Altra Soluzione generale di problemi precedenti.*

[13] *La dottrina delle probabilità.*

[14] *Osservazioni fatte sui Bollettini dei Decessi.*

[15] La parola "statistica" è di origine italiana e deriva da "stato".

[16] *Saggio sulla risoluzione di un problema nella dottrina delle possibilità.*

[17] *Teoria analitica delle probabilità.*

[18] Stigler [13] nota che questo è un buon esempio della sua legge dell'eponimo: «Non c'è scoperta scientifica che porti il nome del suo scopritore originale» Due altri esempi: la cometa di Halley era stata osservata da astronomi almeno dal 240 a.C.; e la stessa legge dell'eponimo di Stigler, che lui stesso attribuisce al sociologo Robert K. Merton.

[19] *Leggi tipiche dell'eredità.*

[20] *Teoria del moto dei corpi celesti.*

[21] La parola "gas", deformazione del termine greco *chaos*, fu inventata dal chimico, medico e filosofo fiammingo Jan Baptista van Helmot, che la introdusse nel volume *Ortus Medicinae* del 1632.

[22] *Un'indagine sulle leggi del pensiero.*

[23] *La logica della probabilità.*

[24] Citato in [12].

BIBLIOGRAFIA

[1] Bernstein, Peter L., *Against the Gods. The remarkable story of risk*. Wiley, New York 1996.

[2] De Finetti, Bruno, *Teoria delle probabilità*, 2voll., Einaudi, Torino 1970.

[3] de Moivre, Abraham, *The Doctrine of chances*, 3.a ed., Millar, Londra 1756.

[4] Devoto, Giacomo & Oli Giancarlo*: Il Dizionario della lingua italiano*, Le Monnier, Firenze 1990.

[5] Hacking, Ian, *L'emergenza della probabilità,* Il Saggiatore, Milano 1987.

[6] Kolmogorov, A. N.: *Foundations of probability,* Chelsea Publ, Co./Am. Math. Soc., Providence (RI) 1950.

[7] Luciano Di Samosata, *Opere voltate in italiano da Luigi Settembrini*. Vol. I www.liberliber.it

[8] Ore, Oynstein, *Cardano, the gambling scholar* , Princeton University Press, Princeton 1953.

[9] Ore, Oynstein, *Pascal and the invention of probability theory*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 409–419.

[10] Pascal, Blaise, *Pensieri* (a cura di P. Serini) n.164; (n.233 Ed. Brunschvicg), Einaudi, Torino 1962.

[11] Schumacher, Ernst F., *Piccolo è bello*, Oscar Mondadori, Milano 1980.

[12] Stewart, Ian, *Dio gioca a dadi?*, Bollati Boringhieri, Torino 1993.

[13] Stigler, S. M., The History of statistics in 1933, *Stat. Sci.* 11/.3 (1996), pp. 244-252.

Suggerimenti di lettura

A. Testi di primo livello universitario

Baclawski, K., Cerasoli, M., Rota, Gian Carlo, *Introduzione alla probabilità*, U.M.I., Bologna 1990.

Dall'Aglio, Giorgio, *Calcolo delle probabilità,* 2 ed., Zanichelli, Bologna 2000.

Freedman, D., Pisani, R., Purves, R., *Statistica*, McGraw-Hill Italiana, Milano 1998.

B. Testi di divulgazione

Dacunha-Castelle, Didier, *La scienza del caso* Dedalo, Bari 1998.

Devlin, Keith, *La Lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano 2008.

Ekeland Ivar, *A caso,* Bollati Boringhieri Torino 1992.

Rosenthal, Jeffrey S., *Le regole del caso*, Longanesi, Milano 2006.

Ruelle David, *Caso e caos*, Bollati Boringhieri, Torino1992.

D. Per insegnanti

Cerasoli, Mauro, Breve storia ragionata della probabilità (1995), ora consultabile in http://www.webalice.it/mauro.cerasoli/Articoli.htm

Pintacuda N., *Primo corso di probabilità*, Muzzio, Padova 1983.

Prodi, Giovanni, *Matematica come scoperta*, D'Anna, Messina- Firenze 1977.

Progetto di Educazione Scientifica della Regione Toscana,

http://159.213.83.111/eduscienze/html/esperienza.asp?id_esp=81

http://159.213.83.111/eduscienze/html/esperienza.asp?id_esp=64

Rossi C., *La matematica dell'incertezza. Didattica della probabilità e della statistica*, Zanichelli, Bologna 1999.

C. Principali testi di storia della probabilità e della statistica consultati

Dale, A. I., *A History of inverse probability from Thomas Bayes to Karl Pearson,* Springer, Berlino 1991.

Hald, A., *A History of Probability and Statistics and TheirApplications before 1750,* Wiley, New York 1990.

Hald, A., *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, Wiley, New York 1998.

Todhunter, I., *A History of Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace,* Chelsea Publ./Am. Math. Soc., Providence (RI) 1865.