# Superman e le formiche

Roberto Casalbuoni

*Dipartimento di Fisica, Sezione INFN, Istituto G. Galilei per la Fisica Teorica e OpenLab, Firenze*

## 1. Introduzione

Un problema molto interessante e che si presenta in molte situazioni è quello del cambiamento di scala, cioè: cosa succede se si cambiano le dimensioni degli oggetti? È un problema non banale perché richiede considerazioni di tipo fisico assieme a quelle di tipo geometrico[1]. Il primo ad affrontarlo nel modo corretto è stato Galileo Galilei (1564 – 1642) nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* [4], pubblicato nel 1638. Galileo si era già occupato di questo problema quando aveva solo 24 anni (1588) in occasione di due lezioni tenute all' Accademia Fiorentina sulle dimensioni dell'Inferno di Dante, [3]. Come vedremo, in queste due lezioni, Galileo affrontava il problema del cambiamento delle dimensioni degli oggetti solo dal punto di vista geometrico senza tenere nel necessario conto la parte fisica.


*Figura 1 - La striscia di Siegel e Shuster su Superman e le formiche giganti.*

A questo errore rimediò poi brillantemente nel 1638. Dopo aver esposto come si devono effettuare correttamente le trasformazioni di scala applicheremo poi queste idee all'illustrazione di una striscia di Siegel e Shuster che mostra Superman che difende la terra dall'attacco di formiche giganti (vedi Figura 1).

## 2. Galileo e l'inferno di Dante

Come abbiamo già detto, nel 1588, il giovane Galileo tenne due lezioni all'Accademia Fiorentina sulla figura, il sito e le dimensioni dell'Inferno di Dante. Lo scopo delle lezioni era di confrontare due tesi sull'Inferno, una espressa dal Manetti ed un'altra dal

Vellutello. Le due tesi erano identiche per quanto concerneva l'aspetto generale dell'Inferno (che si può per altro ricavare da una attenta lettura della Divina Commedia), ma che differiscono in modo notevole per le dimensioni. Infatti l'Inferno di Vellutello aveva delle dimensioni lineari circa 10 volte più piccole di quelle del Manetti (vedi Figura 2).

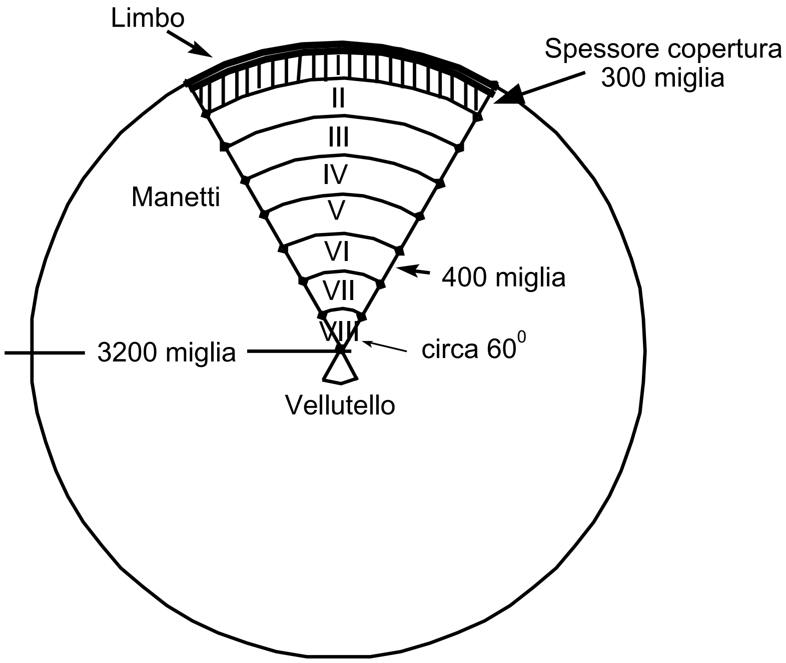


*Figura 2 - Il cono più grande rappresenta l'Inferno del Manetti, mentre quello più piccolo l'Inferno del Vellutello.*

L'Inferno del Manetti è dato da una sezione conica della terra con un angolo di apertura di $60^0$ e l'arco sotteso ha quindi dimensioni circa uguali al raggio terrestre. Questi, e quindi la profondità dell'Inferno, sono stimati in circa 3200 miglia. Segue che la profondità di ognuno degli 8 gironi dell'Inferno è di circa 400 miglia. Il prmo girone è costituito dal Purgatorio (di uno spessore di 100 miglia) a cui segue la copertura dell'Inferno alta 300 miglia. Il Vellutello assegnava all'Inferno la medesima struttura ma con una profondità complessiva di circa 300 miglia invece delle 3200 del Manetti. L'obiezione principale all'Inferno del Manetti riguardava la stabilità della copertura. Galileo, che sosteneva la tesi di quest'ultimo, rispose a questa obiezione osservando che il rapporto tra l'arco della cupola del Duomo di Firenze e lo spessore è circa 15, mentre per l'Inferno del Manetti si ha 3200/300 ~10 e che quindi questa copertura dovesse essere più stabile di quella del Duomo. Il ragionamento geometrico di Galileo non fa una grinza, ma come non tiene conto dell'aspetto fisico del problema che fa sì che con l'aumentare delle dimensioni le capacità di resistenza dei materiali diminuiscono. Come vedremo Galileo costruisce un bellissimo esempio di questo punto nei Discorsi sulle Due Nuove Scienze.

## 3. Galileo e le trasformazioni di scala

L'esempio portato da Galileo per illustrare il punto legato alla resistenza dei materiali è, come abbiamo notato alla fine del paragrafo precedente, tratto dal *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* [4]:

> E per un breve esempio di questo che dico, disegnai già la figura di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato in tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzionale a quel dell'osso minore nell'animal più piccolo, e le figure sono queste: dove vedete sproporzionata figura che diviene quella dell'osso ingrandito. Dal che è manifesto, che chi volesse mantener in un vastissimo gigante le proporzioni che hanno le membra di un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura e resistente per formarne l'ossa, o vero ammettere che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca che ne gli uomini di statura mediocre; altrimenti, crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere e cadere. Dove che, all'incontro, si vede, nel diminuire i corpi non si diminuir con la medesima proporzione le forze, anzi ne i minimi crescer la gagliardia con proporzion maggiore: onde io credo che un piccolo cane porterebbe addosso due o tre cani eguali a sé, ma non penso già che un cavallo portasse né anco un solo cavallo, a se stesso eguale.

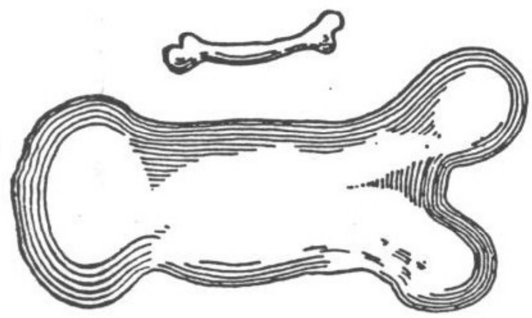

*Figura 3 - Confronto delle ossa dal brano di Galileo.*

In questo brano Galileo fa una considerazione sul cambiamento di scale in fisica. Il suo interesse è cosa accada se, per esempio, si aumentano o si diminuiscono le dimensioni di un osso. La pressione che la forza peso esercita sulla sezione trasversale dell'osso è proporzionale al rapporto $V/S$, dove $V$ è il volume e $S$ la sezione trasversale e quindi la resistenza dell'osso a $S/V$.

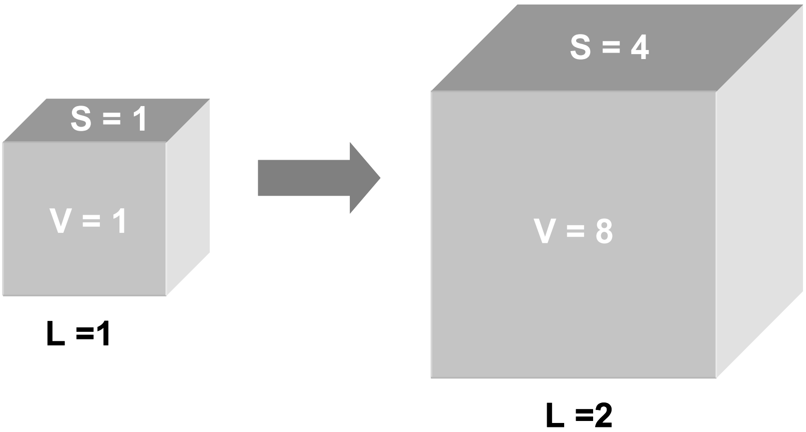


*Figura 4 - Scalando le dimensioni lineari di un fattore 2 il valore della superficie di una faccia del cubo raddoppia, mentre il volume diventa 8 volte più grande. Quindi il rapporto tra volume e superficie raddoppia.*

Vediamo che se scaliamo tutte le dimensioni di un fattore s, la pressione (il segno ~ significa uguale circa, cioè a meno di fattori numerici):

$$P \sim \frac{V}{S} \tag{3.1}$$

scala come s. Quindi aumentando le dimensioni la pressione aumenta e le capacità di resistenza diminuiscono. Questo è esemplificato nella figura 5. Ne segue che le formiche giganti di Figura 1 non sono realistiche dato che sono scalate in modo uniforme.

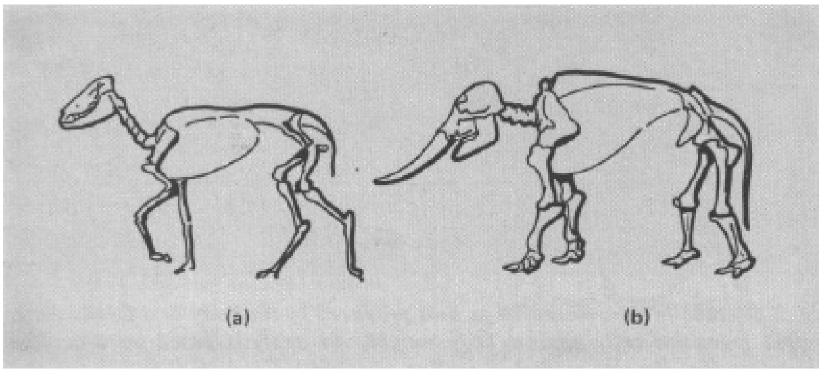


*Figura 5 - Due animali estinti, il Neohipparion (piccolo cavallo americano) a sinistra ed un Mastodonte a destra, un animale tipo elefante, riportati in uguale scala. La figura illustra come le ossa di un animale più pesante siano più spesse e quindi più forti.*

Galileo usò un argomento di scala anche per quanto concerne il moto di caduta dei gravi, per capire la dipendenza del moto dalla resistenza dell'aria. Considerando degli oggetti sferici di materiale fissato il ragionamento di Galileo era che la resistenza, R, dell'aria sulla sfera che cade è direttamente proporzionale alla superficie ed inversamente proporzionale al peso e quindi al volume. Da cui:

$$R \sim \frac{S}{V} \sim \frac{1}{r} \tag{3.2}$$

dove r è il raggio della sfera. In questo modo Galileo dimostrò che per eliminare l'effetto della resistenza dell'aria risultava conveniente usare sfere grandi.

## 4. Analisi dimensionale

Le considerazioni precedenti si basano su quantità che dipendono da un solo fattore di scala geometrico (una lunghezza). Ma in fisica intervengono anche altre grandezze con dimensioni diverse. È un fatto che tutte le grandezze fisiche si possono riportare a misure di massa, di lunghezza e di tempo che indicheremo con i simboli m, $\ell$ e t. Infatti tutte le altre grandezze hanno dimensioni riconducibili alle tre precedenti, per esempio la velocità misura lo spazio percorso in un dato tempo, 100 Km/h significa che si fanno 100 Km in un'ora. Se si fanno 60 Km. in due ore, la velocità è di 30 Km/h. Quindi la velocità si ottiene dividendo uno spazio per un tempo. L'analisi dimensionale rappresenta questo concetto facendo uso delle notazioni di Maxwell che definiscono le dimensioni della grandezza fisica in parentesi quadra in termini di potenze di m, $\ell$ e t. Quindi per la velocità v, avremo:

$$[v] = \frac{\ell}{t} \tag{4.1}$$

Analogamente l'accelerazione misura la variazione della velocità per unità di tempo. In termini automobilistici, se una macchina accelera da 0 a 100 Km/h in 13 secondi (come una Fiat 500), dato che 100 Km/h corrispondono a circa 30 m/sec, la variazione di velocità sarà circa 30/13 ~ 2.3 m/sec$^2$. Se invece accelera da 0 a 100 Km/h in 4 secondi (Ferrari F430), l'accelerazione sarà approssimativamente 7.5 m/sec$^2$. Quindi, la notazione dimensionale per l'accelerazione sarà

$$[a] = \frac{\ell}{t^2} \tag{4.2}$$

Consideriamo infine una forza. In virtù della seconda legge di Newton, F = ma, che lega la forza alla massa ed all'accelerazione possiamo effettuare immediatamente il calcolo delle sue dimensioni:

$$[F] = [ma] = \frac{m\ell}{t^2} \tag{4.3}$$

L'unità di misura utilizzata per la forza è il Newton. 1 Newton è la misura di una forza che agendo su una massa di 1 Kg. le conferisce un'accelerazione di 1 m/sec$^2$.

La teoria dell'analisi dimensionale fu formulata esplicitamente da Fourier [2]: "*Ogni quantità fisica ha una sua propria dimensione ed i vari termini di un'equazione non possono essere comparati se non hanno lo stesso esponente dimensionale.*" Il significato preciso che ha questa affermazione è che ogni equazione fisica deve sempre uguagliare quantità che hanno le stesse dimensioni fisiche e che sono espresse nelle stesse unità di misura. Con questi requisiti le equazioni valgono anche se scegliamo un diverso sistema di unità di misura purché questo sia fatto in maniera consistente. Cioè se per esempio abbiamo l'uguaglianza di due lunghezze A e B, entrambe di 1 metro, l'uguaglianza A = B vale anche se esprimiamo le lunghezze in centimetri. L'unica differenza è che i valori numerici di A e di B (in questo caso 100) sono cambiati rispetto a quando li esprimevamo in metri, ma l'uguaglianza rimane.

Però l'analisi dimensionale fu usata per risolvere problemi fisici solo più tardi. Rayleigh nel 1915 osservava: "*Sono stato spesso impressionato dalla scarsa attenzione presentata dai ricercatori al principio di similitudine. Avviene spesso che risultati sono enunciati sotto forma di leggi nuove sulla base di esperimenti molto complessi, quando potrebbero essere ottenuti sulla base di semplici e rapide considerazioni dimensionali.*" Illustreremo questo metodo derivando alcuni risultati che, in genere, si ottengono risolvendo le equazioni fisiche che descrivono il fenomeno. Al fine di ottenere dei risultati dal principio di similitudine o dall'analisi dimensionale, occorre seguire i seguenti passaggi:

- studio della fenomenologia,
- formulazione del problema,
- determinazione delle variabili da cui dipende il problema.

Consideriamo il semplice esempio della caduta di un grave:

- Fenomenologia: tutti i gravi, nel vuoto, cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa.
- Formulazione del problema: ci chiediamo come varia il tempo di caduta di un grave (nel vuoto) in funzione dell'altezza da cui si lascia cadere
- Risposta dimensionale: richiede la determinazione delle quantità da cui dipende il tempo di caduta. In base all'analisi fenomenologica queste saranno: l'altezza h, e l'accelerazione g di gravità. Non dipenderà però dalla massa. Osservando che

$$[g] = \frac{\ell}{t^2}, \quad [h] = \ell \tag{4.4}$$

vediamo subito che

$$\left[\frac{h}{g}\right] = t^2 \tag{4.5}$$

Pertanto la relazione tra il tempo di caduta T, l'altezza h e l'accelerazione di gravità g deve essere:

$$T = c\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{4.6}$$

dove c è una costante. L'analisi dimensionale non fissa c, ma il risultato ha nondimeno la sua utilità. Per esempio, se vogliamo confrontare il tempo di caduta di due gravi ad altezze diverse avremo

$$\frac{t'}{t} = \frac{\sqrt{\frac{h'}{g}}}{\sqrt{\frac{h}{g}}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \tag{4.7}$$

che non dipende da c. Analogamente se vogliamo confrontare i tempi di caduta di due gravi che cadono dalla stessa altezza sulla terra e sulla luna si ha:

$$\frac{t_L}{t_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9.68}{1.72}} \approx 2.45 \tag{4.8}$$

qui $t_L$ e $t_T$ sono i tempi di caduta di un grave sulla luna e sulla terra rispettivamente, mentre 9.68 e 1.72 sono le accelerazioni di gravità sulla terra e sulla luna espresse in m/sec$^2$.

Un'altra semplice applicazione, molto simile alla precedente, è il calcolo del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice. Trascurando gli attriti, e per piccole oscillazioni, il periodo del pendolo dipende solo dalla lunghezza e dall'accelerazione di gravità (non dipende dalla massa, perché l'unica forza è quella di gravità e tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione). Quindi anche in questo caso

$$T = c\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.9}$$

## 5. La forza di Superman

Nelle versioni più moderne Superman possiede vari superpoteri ma, all'inizio (1939) possedeva solo la superforza . L'origine della superforza veniva attribuita dagli autori alla circostanza della nascita di Superman su un pianeta, Krypton, con gravità molto più grande di quella terrestre. Il problema che ci porremo è quello di determinare il valore dell'accelerazione di gravità su Krypton, facendo uso della seguente serie di ipotesi:

a) Ossa e muscoli di Superman adattati alla forza di gravità di Krypton;

b) Superman può arrivare con un salto sulla cima di un grattacielo di 100 piani (circa 350 metri).

Useremo poi per i nostri calcoli la legge di Newton (F = ma) ed il fatto, già osservato che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione di gravità. Questo significa che in base alla legge di Newton, ogni corpo è soggetto ad una forza (esercitata dalla terra), detta forza peso e che risulta quindi data da

$$P = mg \tag{4.10}$$

L'accelerazione di gravità sulla terra vale circa 10 m/sec$^2$. Questo significa che la velocità di un corpo che cade varia di circa 10 m/sec ~ 36 Km/h in ogni secondo. Quindi dopo dopo 3 secondi si raggiunge una velocità di circa 110 Km/h. L'accelerazione di gravità, come vedremo dopo, dipende dalle caratteristiche del pianeta che stiamo considerando. Sulla luna è circa 1/6 di quella terrestre.

Nel vuoto spaziale, lontani da ogni pianeta, l'accelerazione di gravità è nulla. Tra l'altro queste considerazioni mettono bene in luce la differenza tra peso e massa. La massa è una caratteristica intrinseca di un oggetto, mentre il peso dipende dalla forza di gravità a cui è soggetto e che può cambiare da luogo a luogo. Per le applicazioni pratiche le variazioni della gravità, fino a che si rimane sulla terra, sono trascurabili e quindi si può usare il chilogrammo come unità di misura del peso e della massa. Per questo motivo quando acquistiamo delle pere ne chiediamo un chilo invece che chiederne 10 Newton.

Vediamo ora quale sia il meccanismo fisico che permette di spiccare un balzo. In sostanza si tratta di flettere i muscoli ed applicare al terreno una forza. Il terreno, per il principio di azione e reazione, produrrà una forza uguale e contraria che spingerà il saltatore verso l'alto. Possiamo valutare l'accelerazione del saltatore considerando che quando inizia a flettere i muscoli la sua velocità è nulla e che la sua velocità finale, v, si avrà quanda rilascia i muscoli e contemporaneamente il terreno. Quindi l'accelerazione sarà data da a =v/t, se t è il tempo che intercorre dal momento in cui flette i muscoli sino al momento in cui li rilascia. Ora si vede facilmente che l'altezza a cui si può arrivare dipende dalla velocità di stacco dal terreno. Infatti durante il moto in aria (trascurandone la resistenza) esiste un'unica forza, la forza di gravità che tende a decelerare il moto. Quindi il moto verso l'alto continuerà fino a quando la velocità si annulla. Da quel momento in poi inizierebbe il moto di discesa. Esiste dunque una relazione tra velocità, altezza a cui il saltatore può arrivare ed accelerazione di gravità che si può stabilire su base dimensionale. Infatti

$$[g] = \frac{\ell}{t^2}, \quad [h] = \ell \quad \Rightarrow \quad [gh] = \frac{\ell^2}{t^2} = [v^2] \tag{4.11}$$

da cui si vede che

$$v = c\sqrt{gh} \qquad (v = \sqrt{2gh}) \tag{4.12}$$

dove in parentesi abbiamo riportato il risultato del calcolo esatto. D'altra parte affinché nello sforzo muscolare si possa produrre l'accelerazione voluta per realizzare la velocità di stacco necessaria, dovremo applicare una certa forza muscolare. L'ulteriore ipotesi che faremo (ma è ben verificata sperimentalmente) è che questa forza sia una data percentuale del proprio peso, P, circa il 70%. Mettendo tutto assieme, e facendo uso della seconda legge di Newton, abbiamo che la forza applicata, 0.7 P, deve essere uguale alla massa del saltatore moltiplicata per l'accelerazione che a sua volta è data dalla velocità di stacco, v, divisa per il tempo t in cui viene applicato lo sforzo muscolare. Mettendo il tutto in formule

$$0.7P = m\frac{v}{t} \tag{4.13}$$

Dato che i muscoli di Superman sono adattati a Krypton, in questa formula P si deve intendere come il peso che Superman ha su Krypton e quindi dato da $mg_K$, dove $g_K$ è l'accelerazione di gravità su Krypton. Quindi nel caso di Superman si ha

$$0.7mg_K = m\frac{v_S}{t} \tag{4.14}$$

dove $v_S$ è la velocità di stacco di Superman. Lo stesso ragionamento si può però applicare anche ad un terrestre ed in questo caso si avrebbe

$$0.7mg = m\frac{v_U}{t} \tag{4.15}$$

dove $v_U$ è la velocità di stacco per un uomo ed abbiamo assunto che il tempo di caricamento dei muscoli sia lo stesso per l'uomo e per Superman. Si vede dunque (dividendo membro a membro queste due equazioni) che

$$\frac{g_K}{g} = \frac{v_S}{v_U} \tag{4.16}$$

L'equazione (4.12) ci dice che la velocità di Superman va come la radice quadrata dell'accelerazione di gravità sulla terra (perché sulla terra sta saltando) per l'altezza a cui riesce a saltare sulla terra, $h_S$, così come per un uomo la velocità di stacco va come la radice quadrata di g per l'altezza a cui riesce a saltare, $h_U$. Dunque nel rapporto tra le due velocità l'accelerazione di gravità g, come la costante c, si cancella e si trova infine

$$\frac{g_K}{g} = \sqrt{\frac{h_S}{h_U}} \tag{4.17}$$

Se ammettiamo che un uomo della corporatura di Superman salti sulla terra circa 1.60 metri (Superman non ha propriamente il fisico di un saltatore in alto) si ha subito

$$g_K = g\sqrt{\frac{350}{1.6}} \approx 15g \tag{4.18}$$

Adesso che conosciamo l'accelerazione di gravità su Krypton siamo in grado di conoscerne altre caratteristiche. Assumendo che la sua composizione sia simile a quella della della terra è ragionevole supporre che le densità dei due pianeti siano simili. In questo caso siamo in grado di dedurre le dimensioni di Krypton. Infatti la legge di gravitazione universale di Newton ci dice che due corpi di massa m e M si attraggono con una forza che dipende dalla loro distanza R

$$F = G\frac{mM}{R^2} \tag{4.19}$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Dunque un pianeta esercita una forza (la forza peso) su ogni corpo che sia appoggiato alla sua superficie, data da (vedi Figura 6).

$$P = G\frac{M}{r^2}m \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{r^2} \tag{4.20}$$

Dove abbiamo usato la definizione P = mg per ricavare l'accelerazione di gravità esercitata da un pianeta di massa M e raggio r.

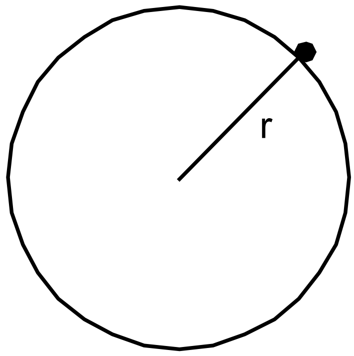


*Figura 6 - Una massa m appoggiata sulla superficie di un pianeta è soggetta alla forza peso data dall'equazione (4.20).*

Dato che la massa è data dalla densità per il volume, che è a sua volta proporzionale al cubo del raggio del pianeta, vediamo che l'accelerazione di gravità di un pianeta aumenta proporzionalmente al suo raggio e dunque ricaviamo la seguente relazione tra il raggio di Krypton e quello della terra

$$r_K \approx 15r \qquad (4.21)$$

Quindi Krypton dovrebbe essere un pianeta molto grande. D'altra parte noi sappiamo che i pianeti grandi son gassosi. Giove, per esempio, ha un raggio pari a circa 11 volte il raggio della terra ed è gassoso. Altrettanto gassosi sono Nettuno e Saturno con raggi 4 volte più grandi del nostro. Il fatto che siano gassosi è legato alla stabilità di questi pianeti. Se fossero solidi sarebbero instabili.

Potremmo supporre che Krypton fosse più denso a causa della forza di gravità maggiore, ma tale ipotesi non regge perché la stabilità della materia è determinata dalle forze elettriche che, a parità di condizioni sono enormemente più grandi di quelle gravitazionali[2], e quindi la maggior gravità da luogo ad effetti praticamente impercettibili sulle distanze atomiche tipiche. D'altra parte esistono degli oggetti con densità elevatissime, addirittura superiori a quelle nucleari. Si tratta delle stelle a neutroni, la cui esistenza fu prevista da Baade e Zwicky nel 1933 (un anno dopo la scoperta del neutrone). La prima stella a neutroni fu osservata da Hewish e Okoye nel 1965. Questa stella si trova all'interno della Nebulosa del Granchio. Le stelle a neutroni arrivano a densità dell'ordine di $10^{14}$ gr/cm$^3$ (per confronto il piombo ha una densità pari a 11 gr/cm$^3$). Un'ipotesi suggestiva è che Krypton abbia dimensioni simili a quelle terrestri ma con al centro un nocciolo di neutroni con un raggio di circa 600 metri (vedi Fugura 4). In questo modo risulterebbe proprio $g_K \sim 15$ g.

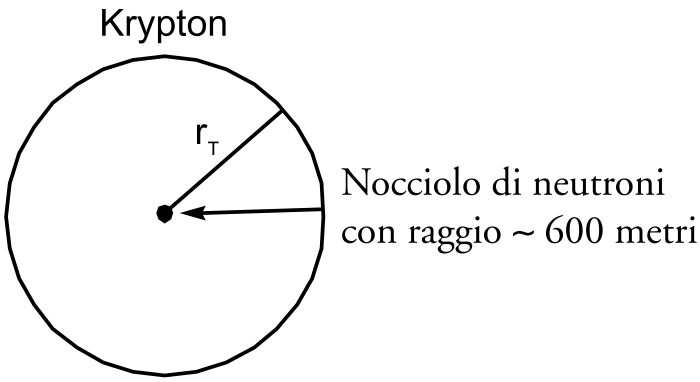


*Figura 7 - Come si prenterebbe Krypton se avesse al centro un nocciolo di neutroni di raggio circa 600 metri. In tal caso il raggio del pianeta sarebbe circa pari al raggio terrestre, $r_T$.*

D'altra parte una struttura di questo tipo non è completamente stabile e con l'andare del tempo ci dovrebbero essere dei violenti terremoti che distruggerebbero il pianeta. Si dà il caso che questa, secondo gli autori di Superman, sia proprio la ragione per cui il supereroe è stato mandato sulla terra dai suoi genitori, per evitargli una morte sicura a causa dei tremendi terremoti previsti da suo padre. Dato che la prima striscia di Superman è del 1939 sembra del tutto improbabile che gli autori abbiano pensato ad una ipotesi di questo tipo. Ma chi sa? Furono bravi o solo fortunati?

# NOTE

[1] Per una discussione più approfondita di questo problema, vedi [1].

[2] La forza elettrica tra due protoni è $10^{36}$ volte più grande di quella gravitazionale.

## BIBLIOGRAFIA

[1] Casalbuoni R., Il Principio di similitudine in Fisica, in *Pianeta Galileo 2006,* a cura di A. Peruzzi, pp. 49-66, Consiglio regionale della Toscana, Firenze 2007.

[2] Fourier J., *Theorie Analytique de la Chaleur,* Didot, Parigi 1822.

[3] Galilei G., *Due lezioni all'accademia fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell' Inferno di Dante*, 1588, http://it.wikisource.org/wiki/Autore:Galileo_Galilei.

[4] Galilei G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* 1638, http://it.wikisource.org/wiki/Autore:Galileo_Galilei.