IL NUMERO e*

ALESSANDRA DEL PICCOLO

Progetto Polymath, Torino

1. Come diventare milionari

Su una tavoletta babilonese del 1700 a.C., ora conservata al Museo Louvre di Parigi, un anonimo autore ha formulato un problema che in termini moderni può essere così tradotto: «dopo quanti anni raddoppio il capitale, se l'interesse annuale è del 20%?» La risposta più istintiva potrebbe essere cinque anni, visto che ci dicono che il capitale aumenta di 1/5 ogni anno, ma forse è meglio fare qualche calcolo. Supponiamo, quindi, che si siano investiti 100 € il primo gennaio 2010. Al 31 dicembre dello stesso anno potremo incassare 20 € di interessi maturati. Il primo gennaio 2011, potremo così investire 120 € che, allo stesso tasso di interesse, frutteranno 24 € a fine anno. Il primo gennaio 2012 il nostro capitale sarà di 144 € e ammonterà a 172,80 € all'inizio dell'anno successivo. Infine, il 31 dicembre 2013 potremo disporre di un capitale di 207,40 euro. In definitiva, occorrono meno di tre anni affinché il capitale iniziale raddoppi.

I Babilonesi avevano trovato la soluzione approssimata, ma non avevano certo gli strumenti matematici per generalizzare il problema. Si chiama *matematica finanziaria* quella parte della matematica che viene applicata allo studio dei problemi concernenti la finanza e che vede nella legge seguente uno dei suoi capisaldi:

$$M = C\,(1+i)^t$$

dove M è il montante, ovvero l'ammontare del capitale al termine dell'investimento, C il capitale iniziale, i il tasso di interesse annuo e t il numero di anni di durata dell'investimento.

A questo punto è legittimo un dubbio: è meglio aspettare dodici mesi per incassare gli interessi o conviene incassare gli interessi dopo sei mesi e poi reinvestire per il resto dell'anno? Con un calcolo simile a quello precedente si può verificare che, suddividendo l'anno in n intervalli uguali su cui applicare l'n-esima parte dell'interesse annuo, il montante cresce al crescere di n, secondo la formula

$$M = C\,(1+i/n)^n$$

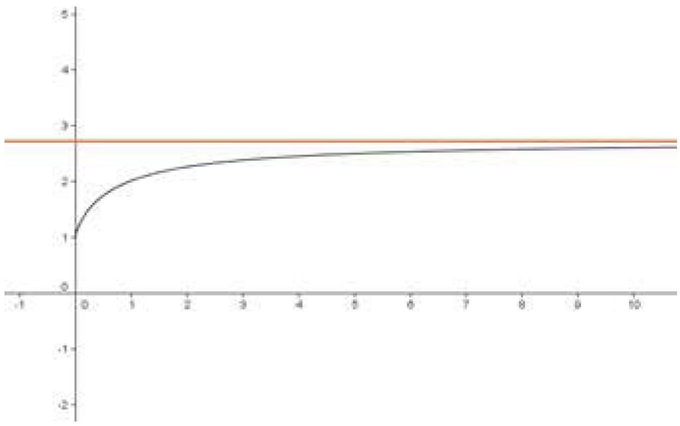
Immaginiamo, ora, di metterci nelle condizioni migliori possibili, ovvero pensiamo di disporre di un capitale C = 1.000.000 € e di poterlo investire con un tasso annuo i = 1 = 100%. La tabella seguente illustra la crescita costante del capitale al crescere del

* Lezione tenuta il 12 novembre 2009 a Empoli, presso l'Istituto IIS Ferrari-Brunelleschi, nell'ambito dell'edizione 2009 di *Pianeta Galileo*.

numero di capitalizzazioni.

numero di capitalizzazioni	**capitale finale**	
1	2000000	annuale
2	2250000	semestrale
3	2370370	quadrimestrale
4	2441406	trimestrale
6	2521626	bimestrale
12	2613035	mensile
365	2714567	giornaliera
8760	2718127	oraria
525600	**2718279**	al minuto
31536000	**2718282**	al secondo

Risulta evidente che la crescita del capitale tende a rallentare: che cosa sta succedendo? In effetti, rappresentando sul piano (n, M) la legge precedente, si ottiene una curva che tende ad avvicinarsi sempre di più a un valore che, però, non riesce a raggiungere.



Il valore è quello che possiamo ottenere pensando di capitalizzare e reinvestire ogni istante, ovvero in ogni frazione di tempo così piccola da poter essere contenuta un numero infinito di volte nel nostro anno. Si può dimostrare[1] che:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots = e$$

In conclusione, disponendo di un tasso annuale del 100% e passando ogni istante dell'anno a investire, incassare l'interesse maturato, reinvestire e nuovamente incassare, riusciremo al massimo ad aumentare il nostro capitale di e volte e non di più. L'importante è sapersi accontentare.

2. L'uomo che duplicò la vita agli astronomi

Durante il XVI e il XVII sec. i progressi scientifici erano tumultuosi in ogni campo: fisici e astronomi del calibro di Copernico, Galilei, Keplero, Brahe ridisegnavano le mappe del cielo togliendo la Terra dal centro dell'Universo, mentre navigatori e cartografi quali Magellano e Mercatore ridisegnavano la mappa della Terra stessa. La matematica giocava un ruolo centrale nella scienza come strumento indispensabile e come chiave interpretativa della natura stessa.

In questo clima così vivace nasce nel 1550, presso Edimburgo, John Nepair, meglio noto come Nepero. Scarse le notizie biografiche, al punto che vi sono dei dubbi anche sull'effettiva trascrizione del cognome: Nepair, Neper oppure Nappier. Di lui sono note le nobili origini e una profonda fede protestante: studente di teologia all'università, pubblica nel 1593 un'invettiva contro Papa Clemente VIII, che ritiene essere l'Anticristo, e predice la fine del mondo tra il 1688 e il 1700. Ha dodici figli, di cui dieci dalla seconda moglie; come proprietario terriero si occupa di agricoltura con efficiente razionalità e progetta numerose macchine militari che, però, non realizza.

Uomo di cultura, sia umanistica che scientifica, Nepero è ben consapevole che «eseguire calcoli è operazione difficile e lenta e spesso la noia che ne deriva è la causa principale della disaffezione che la maggioranza della gente prova nei confronti della matematica» [3].

In quel periodo gli strumenti matematici più utilizzati da scienziati, astronomi e navigatori erano quelli che erano stati sviluppati all'interno della trigonometria. Proprio le formule di prostaferesi e le ben più recenti proprietà delle potenze[2] offrono a Nepero lo spunto per quella che sarà un'idea geniale. Osserviamo, ad esempio, le formule seguenti

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

In ognuna di esse vi è la stessa filosofia di base, ovvero la possibilità di passare da un'operazione più complessa (la moltiplicazione o la divisione) ad una più semplice (l'addizione o la sottrazione). Ovviamente la semplificazione è più efficace di fronte a numeri con tante cifre: si pensi, ad esempio, di dover eseguire il prodotto tra 123456789 e 987654321, oppure la loro somma, disponendo solo di carta e matita!

Nepero intuisce che se si trasformasse ogni numero in una potenza di base opportuna, i calcoli più complessi si ridurrebbero a operazioni semplici sui loro esponenti. Il vero problema diventa quindi individuare la base che deve essere un numero di poco più piccolo di 1, in modo da avere potenze con una decrescita molto lenta. Dopo numerosi tentativi Nepero giunge alla conclusione che il numero ottimale – che chiama «proporzione» – è $0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$, molto probabilmente ispirandosi alla scelta che già era stata fatta per compilare le tavole trigonometriche, in cui il raggio unitario veniva suddiviso in 10^7 parti.

È il 1594 e per i successivi vent'anni Nepero passa il tempo a sviluppare la sua idea e a compilare tavole numeriche in cui calcola le quantità

$$10^7 \cdot \left(1-10^{-7}\right)^n \; per \; n = 0,1,2...,100$$

$$10^7 \cdot \left(1-10^{-5}\right)^n \; per \; n = 0,1,2...,50$$

… e così via, progressivamente sottraendo a ogni numero la sua decimilionesima parte, poi la centomillesima …, partendo da 10.000.000 fino ad arrivare a 4.998.609 (all'incirca la metà del primo). Finalmente, nel 1614, Nepero pubblica «la descrizione della meravigliosa regola dei logaritmi», ovvero *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* in cui, per la prima volta, compare la parola *logaritmo* con la quale Nepero indica l'esponente da assegnare alla *proporzione* per ottenere un determinato numero N:

$$N = 10^7 \cdot \left(1-10^{-7}\right)^L \Leftrightarrow L = NaplogN$$ [3]

Si possono contare sulle dita di una mano contributi matematici che sin dal loro primo apparire ebbero un'accoglienza così entusiastica come accadde per i logaritmi: da subito gli studiosi e gli scienziati compresero come il nuovo strumento matematico potesse sveltire notevolmente i calcoli più complessi. In particolare, Henry Briggs, professore di geometria al Gresham College[4] di Londra, raggiunge Nepero a Edimburgo e discute con lui alcune modifiche che perfezionano l'idea originale e le danno l'aspetto noto ancora oggi. Briggs suggerisce di definire il logaritmo come esponente da assegnare alla base 10 per ottenere un numero N noto

$$N = 10^L \Leftrightarrow L = \log_{10} N$$

Si devono a Briggs i concetti di *base, caratteristica* e *mantissa*[5]. Sarà lui a sviluppare queste idee e a pubblicare, nel 1624, *Arithmetica logaritmica*[6], una nuova serie di tavole logaritmiche che decreteranno il successo definitivo dell'invenzione. Grazie a matematici e scienziati del calibro di Keplero, Cavalieri e Wright i logaritmi si diffondono con una rapidità incredibile in Germania, in Italia, in Inghilterra fino ad arrivare in Cina. Ancora due secoli dopo, Pierre-Simone Laplace dirà: «Abbreviando i calcoli, l'invenzione dei logaritmi ha duplicato la vita degli astronomi» [3].

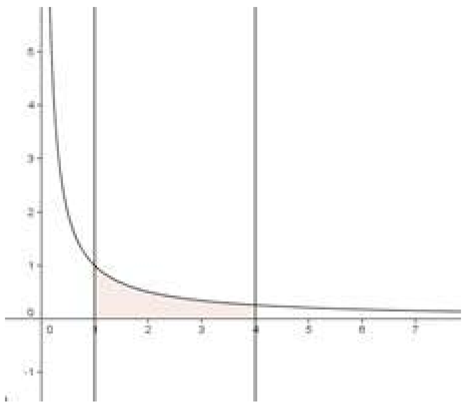
Quasi contemporaneamente, l'invenzione dei logaritmi stimola la realizzazione di strumenti meccanici che facilitino i calcoli, quali il *regolo calcolatore* di Gunter e di Oughtred del 1620, a cui segue la *pascalina* di Blaise Pascal, apparsa una ventina di anni dopo. Nel 1821, infine, Charles Babbage mette a punto la *macchina differenziale* e, successivamente, la *macchina analitica*, veri e propri precursori degli attuali computer che, di fatto, decretano la morte dei logaritmi.

A questo punto non ci rimane che scoprire la relazione intercorente tra *e* e il logaritmi, argomento che sarà oggetto del prossimo paragrafo e che ci obbligherà a fare un passo indietro nel tempo.

3. Iperboliche considerazioni

Quadrare una figura significa determinare il quadrato equivalente alla figura data, ovvero il quadrato avente la stessa area della figura data. I Greci avevano affrontato il problema con un approccio operativo che si basava su costruzioni con riga e compasso. Negli *Elementi* di Euclide si trova la dimostrazione del teorema che afferma l'equivalenza tra ogni poligono a n lati e un opportuno quadrato. Rimanevano in sospeso, però, le *sezioni coniche*, ovvero la parabola, la circonferenza, l'ellisse e l'iperbole. Queste curve erano state studiate da Apollonio di Perga attorno al 200 a.C. e definite come intersezione di un cono con un piano avente inclinazioni opportune. Archimede di Siracusa, con il metodo di esaustione, era riuscito a quadrare segmenti di parabola e aveva determinato la lunghezza di una circonferenza[7] con un'approssimazione incredibilmente accurata, visti gli strumenti matematici a sua disposizione, ma rimaneva ancora in sospeso l'iperbole.

Con Renè Descartes e la sua geometria analitica si aprono nuovi orizzonti di indagine: le sezioni coniche diventano equazioni di II grado con coefficienti opportuni da trattare con i metodi dell'algebra. In particolare, l'equazione dell'iperbole equilatera è

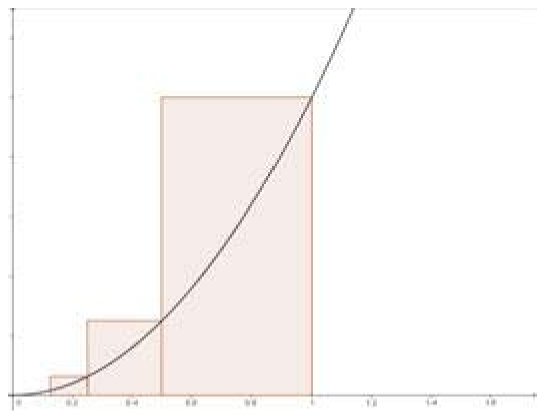


$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0$$

Il problema della quadratura dell'iperbole diventa ora quello di determinare l'area della parte di piano compresa tra il grafico dell'iperbole, l'asse delle x, la retta $x = 1$ e la retta $x = t$. È possibile determinare una formula che esprima l'area come funzione di t, ovvero $A = A(t)$?

Durante il XVII secolo si susseguono diversi tentativi indipendenti. Il più significativo è quello del "principe dei dilettanti" Pierre de Fermat che si occupa della quadratura della famiglia di curve di equazione:



$$y = x^n$$

Utilizzando una serie di rettangoli le cui basi

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots \text{ con } r < 1$$

formano una progressione geometrica decrescente, Fermat giunge a un risultato che anticipa di trent'anni gli straordinari risultati del calcolo differenziale di Newton e Leibniz. Fermat dimostra che:

$$A(r) = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}} = \frac{a^{n+1}\cancel{(1-r)}}{\cancel{(1-r)}\left(1+r+r^2+\ldots+r^n\right)} \xrightarrow[r\to 1]{} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

formula che vale anche se $n < 0$, ma che perde di significato proprio per $n = -1$.

Sarà il gesuita belga Gregorius de Saint-Vincent il primo a notare che, nel caso particolare $n = -1$, i rettangoli usati per l'approssimazione dell'area sottesa dall'iperbole mantengono costante la loro area: a una crescita *geometrica* della distanza dall'origine corrisponde una crescita aritmetica delle aree corrispondenti. Questo significa che l'area sottesa dall'iperbole si può calcolare usando la recente invenzione di Nepero, cioè

$$A(t) = \log t$$

per

$$x \in [1, t]$$

Il logaritmo diventa così una funzione, non più solo uno strumento di calcolo, ma il problema non può dirsi risolto se non si determina quale base utilizzare. I tempi, però, sono ormai maturi per il calcolo infinitesimale, per la cui paternità passarono decenni a lottare tra loro due tra le menti più prolifiche di tutti i tempi: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Il calcolo infinitesimale vede nel "teorema fondamentale del calcolo integrale" lo stupefacente collegamento tra il calcolo dell'*area* sottesa da una funzione e il calcolo delle *tangenti* alla stessa funzione:

$$A = \int y\,dx \Leftrightarrow \frac{dA}{dx} = y.$$

4. La vita in una funzione

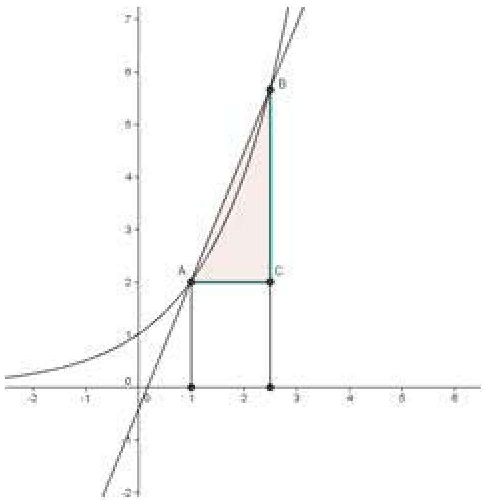
Il calcolo differenziale venne dapprima applicato con successo alle funzioni algebriche, ma nelle applicazioni pratiche spesso si incontravano funzioni, che Leibniz definì *trascendenti*, di cui le funzioni esponenziali costituivano l'esempio più interessante a causa della loro crescita incredibilmente veloce.

La leggenda narra che l'inventore degli scacchi chiese al re, come ricompensa per la sua invenzione, un chicco di riso sulla prima casella, due chicchi di riso sulla seconda, quattro sulla terza, otto sulla quarta e così via fino all'ultima. Il re acconsentì, stupito per la modestia della richiesta e ordinò ai servi di portare un sacco di riso e iniziare a contare i chicchi. Ben presto si accorsero che non solo non sarebbe bastato il sacco, ma nemmeno tutti i sacchi del regno, perché il numero di chicchi dell'ultima casella era

$$2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808 \approx 10^{19}$$

cui si dovevano sommare tutti i chicchi delle 63 caselle precedenti! Messi in fila, i chicchi avrebbero coperto una distanza pari a circa due anni luce, quasi metà della distanza tra la Terra e Alpha Centauri, il sistema stellare più vicino a noi.

In generale una funzione esponenziale è una funzione



$y = b^x$, dove $b > 0$ e

$$x \in \mathbb{R}$$

Si può capire l'andamento di una qualsiasi funzione attraverso l'analisi della pendenza di una retta passante per due punti appartenenti alla funzione sufficientemente vicini tra loro. Meglio ancora se, invece di una retta secante, si valuta la pendenza della retta tangente in un punto assegnato.

$$\lim_{AC \to 0} \frac{BC}{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

La funzione esponenziale è tale per cui la crescita della pendenza delle tangenti è proporzionale alla crescita della funzione stessa.

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h}=b^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

Si può dimostrare che la costante di proporzionalità vale 1 se la base è uguale a *e*. Infatti,

se $\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$, allora $b=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

In altre parole, la funzione esponenziale di base *e* è l'unica funzione che coincide con la propria derivata:

$$y=e^x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=y=e^x$$

Ricordiamo che il *logaritmo briggsiano* è quell'esponente *x* da assegnare alla base 10 per ottenere il numero dato *y*, ovvero

$$y=10^x \Leftrightarrow x=\log_{10} y.$$

Analogamente definiamo *logaritmo naturale* l'esponente *x* da assegnare alla base *e* per ottenere *y*:

$$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y \xrightarrow[\substack{x\to y\\ y\to x}]{} y=\ln x$$

La funzione logaritmo è quindi la funzione inversa della funzione esponenziale e viceversa. Inoltre è sempre Leibniz a dimostrare che la derivata della funzione inversa è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta, quindi

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$$

Poiché $x=\ln y$

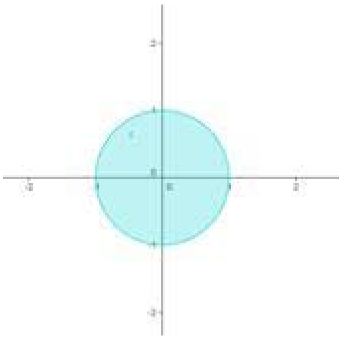
allora

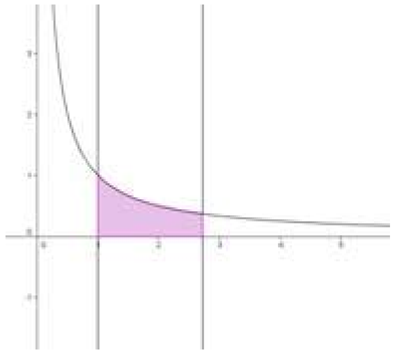
$$\frac{d(\ln y)}{dy}=\frac{1}{y}\xrightarrow[y\to x]{}\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

che equivale a dire che

$$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}dt.$$

Si risolve così il problema che Saint-Vincent aveva lasciato in sospeso: la base corretta per il logaritmo è *e*. In questo modo, usando la lettera *A* come iniziale di area, si arriva alla seguente analogia:





$$A = \pi r^2 \rightarrow A = \pi \Leftrightarrow r = 1$$

cerchio

$$A = \ln x \rightarrow A = 1 \Leftrightarrow x = e$$

iperbole

La funzione esponenziale permette di descrivere tutti quei fenomeni in cui la variazione di una certa quantità è proporzionale alla quantità stessa, mediante una costante a che esprime il tasso di cambiamento ($a > 0$ aumento; $a < 0$ diminuzione). La soluzione è una funzione $y = Ce^{ax}$, dove C è una costante arbitraria che dipende dalle condizioni iniziali del sistema (il valore assunto dalla funzione per $x = 0$).

Si utilizza una funzione esponenziale decrescente se si vuol descrivere

- il processo di *decadimento radioattivo*, in ogni istante proporzionale al numero di atomi presenti nella sostanza: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$;
- la *diminuzione di temperatura* di un corpo messo in un ambiente a temperatura inferiore, pensata costante; essa è proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente: $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1) \rightarrow T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$;
- la *diminuzione dell'intensità di un'onda sonora* in un mezzo in relazione allo spazio percorso, proporzionale all'intensità stessa dell'onda: $\frac{dI}{dx} = -aI \rightarrow I = I_0 e^{-ax}$.

Si utilizza, invece, una funzione esponenziale crescente per calcolare, ad esempio:

- il montante M in *capitalizzazione continua* $M = Ce^{rt}$;
- l'accrescimento di una colonia di batteri o delle prime cellule di una nuova vita[8].

Molto stretto è quindi il legame tra i logaritmi di Nepero e il numero *e*; ed è giusto concludere citando il matematico che ha introdotto questo stesso simbolo. Si tratta di Leonhard Euler, di certo il matematico più prolifico di tutti i tempi. I risultati che portano il suo nome non si contano e spaziano in tutti i campi della scienza. A Euler si deve l'introduzione della lettera π per indicare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e del suo diametro, così come si deve a lui la definizione moderna di logaritmo $N = b^L \Leftrightarrow L = \log_b N$ apparsa nel 1728 e, vent'anni dopo, l'introduzione di *e*.

Caso particolare di quella che viene detta *equazione di Eulero* è la seguente identità, universalmente riconosciuta come una delle più belle formule della matematica:

$$e^{i\pi}+1=0$$

In effetti, in un'unica scrittura sono contenute le operazioni fondamentali – addizione e moltiplicazione – e i numeri più significativi o particolari della matematica: per l'aritmetica lo 0 e l'1, per l'analisi *e*, per la geometria π e per l'algebra *i*. Benjamin Pierce, matematico americano, docente all'università di Harvard, riscoprì per caso l'equazione e disse ai suoi studenti:

> Signori, questa formula è paradossale; non la possiamo capire e non sappiamo che cosa significhi. Ma l'abbiamo dimostrata e quindi sappiamo che deve essere la verità. [3]

NOTE

[1] L'uguaglianza si dimostra utilizzando la formula binomiale di Newton

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots = e$$

Da notare che la successione delle serie parziali è monotona e rapidamente convergente: sono sufficienti 16 termini per avere un'approssimazione di *e* corretta fino alla 14-esima cifra.

[2] Nel 1544 M. Stiefel pubblica *Aritmetica integra* in cui, studiando la progressione geometrica, ricava le cosiddette proprietà delle potenze aventi ugual base.

[3] Dalla definizione segue che $N = 10^7 \Leftrightarrow L = 0$. È importante ricordare che Nepero non definisce operazioni con i logaritmi e non scopre *e*.

[4] Il Gresham College fu inaugurato nel 1597 dopo un cospicuo lascito alla città di Londra da parte di Sir Thomas Gresham. Il college era amministrato dalla Compagnia dei Mercanti che fecero dell'istituto un luogo dove insegnare gratuitamente agli adulti a partire non dal commento di testi, ma dalla pratica su strumenti e questioni di vita quotidiana. Sette le cattedre attivate, in latino e in inglese: teologia, diritto, retorica, musica, medicina, geometria e astronomia.

[5] Ad esempio, se $N = 3{,}456$, allora 3 è la caratteristica mentre 0,456 è la mantissa di *N*. Il termine "mantissa" è di origine etrusca e significa "complemento del peso".

[6] H. Briggs compila le tavole logaritmiche dei numeri da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000 con 14 cifre decimali. Le tavole logaritmiche furono completate nel 1949!

[7] Costruire con riga e compasso un quadrato equivalente a un cerchio di raggio assegnato non ammette soluzione, ma ci sono voluti duemila anni prima di dimostrarlo. Si deve al matematico F. von Lindemann la dimostrazione, nel 1882, della trascendenza di π.

[8] A partire dalla fine dell'Ottocento anche la crescita demografica a livello mondiale ha iniziato a seguire un andamento esponenziale, con tutti i problemi che questo comporta.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boyer, C., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1990.

[2] Coolidge, J. L., The number *e*, *Amer. Math. Monthly*, 57, 1950, pp. 591-602.

[3] Maor, E., *e*: *the story of a number*, Princeton University Press, Princeton 1994.