Da Pitagora a Knuth*

Giuseppe Pirillo

Consiglio Nazionale delle Ricerche, Unità di Firenze
Dipartimento di Matematica Ulisse Dini
Universitè de Marne-la-Vallée

> *Si dicono grandezze commensurabili quelle che sono misurate da una stessa misura, ed incommensurabili quelle di cui non può esistere nessuna misura comune.*
>
> Euclide (*Elementi, Libro X*)

1. Introduzione

In questo articolo cercheremo di sottolineare il rapporto, molto stretto, esistente fra alcuni risultati classici della Scuola pitagorica ed alcuni argomenti oggi studiati dagli informatici ed in particolare da Donald E. Knuth. Da diversi anni suggeriamo che i numeri irrazionali, trattati sia in modo classico sia con il linguaggio dell'odierna informatica teorica, debbano trovare un posto adeguato nei programmi di matematica della scuola secondaria italiana.

Siamo convinti che il linguaggio moderno dell'informatica teorica (e delle parole Sturmiane in particolare) possa fornire agli studenti dei licei uno strumento in più per apprendere con chiarezza le idee di numero razionale e di numero irrazionale. Gli studenti avrebbero a disposizione anche immagini molto efficaci per distinguere fra concetti delicati. A questo proposito, ad esempio, il legame tra la razionalità di un numero e la periodicità della sua *rappresentazione sturmiana* è molto interessante ed è da sottolineare.

Pitagora è un personaggio del quale praticamente non si sa nulla. Al contrario, l'esistenza della Scuola pitagorica (nel seguito, per brevità, scriveremo semplicemente Scuola), attiva a Crotone (nell'odierna Calabria) dal VI al IV secolo a.C., è sufficientemente documentata.

Possiamo considerare fondate le seguenti affermazioni, condivise da molti studiosi di storia della matematica e della filosofia:

- il livello scientifico raggiunto dalla Scuola era molto più elevato di quello delle scuole precedenti;
- la Scuola, legata al partito aristocratico, ebbe una notevole influenza nella vita politica della città di Crotone;
- la Scuola era organizzata in modo molto rigoroso e prevedeva lunghi periodi di studio;

* Il presente articolo è solo una prima schematica stesura di uno più ampio al quale stiamo lavorando. Lezione tenuta a Empoli nell'ambito dell'edizione 2008 di *Pianeta Galileo* e a Montevarchi nell'ambito dell'edizione 2009 di *Pianeta Galileo*.

- nella Scuola esisteva una netta divisione fra *acusmatici*, cioè uditori (ascoltatori), e *matematici*, cioè partecipi degli insegnamenti più profondi;
- nella Scuola erano ammesse anche le donne.

Nella Scuola era profondamente radicata l'idea della matematica come strumento indispensabile per l'indagine del mondo reale. Fortunatamente, questa idea, pur avendo più volte rischiato di essere completamente abbandonata, in realtà è spesso ricomparsa potenziata. A questo proposito, non possiamo non ricordare la celebre frase di Galileo (*Il Saggiatore,* cap. VI):

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente in un oscuro laberinto.

Donald E. Knuth, Professore Emerito presso la Stanford University, è autore di numerosi libri, fra i quali il famosissimo *The art of computer programming*. Ha scritto insieme con Ronald L. Graham ed Oren Patashnik *Concrete mathematics*. Ci piace ricordare anche *3:16 Bible texts illuminated*, un libro che suggerisce una lettura singolare ma interessantissima della Bibbia e che ci presenta un uomo di scienza che ha il dono della fede.

È membro di numerose Accademie e ha ricevuto moltissimi premi e medaglie. Si può tranquillamente parlare di gara fra Università per conferirgli una *laurea honoris causa*. In rappresentanza dell'Università di Firenze, abbiamo avuto l'onore e il privilegio di far parte della commissione che ha consegnato il *dottorato honoris causa* a Donald E. Knuth presso l'Université de Marne-la-Vallée. Il ricordo di quella bellissima giornata ha il potere di suscitare in noi una profonda emozione ancora oggi!

The art of computer programming è un libro famosissimo, sebbene ancora... incompiuto, nel quale Knuth presenta in modo organico praticamente tutto ciò che è noto nello sterminato dominio dei metodi informatici.

Knuth è il 'padre' dell'*analisi degli algoritmi*, ha introdotto diversi nuovi corsi universitari e ha diretto la tesi di dottorato di numerosissimi *excellent students*.

Per quel che riguarda il suo lavoro di programmatore, ci limitiamo solo a ricordare TeX, che ha milioni di utenti, soprattutto matematici, in tutto il mondo[1].

2. Incommensurabilità

I due seguenti enunciati sono ben noti, ma sempre più raramente sono oggetto di insegnamento nella nostra scuola secondaria (e spesso sono ignorati anche nell'insegnamento universitario):

Proposizione 1. Lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili.

Proposizione 2. Lato e diagonale del pentagono regolare sono incommensurabili.

L'attribuzione dei due precedenti teoremi alla Scuola non è però accettata da tutti. La letteratura è vastissima. Si vedano, ad esempio, Acerbi [1], Boyer [2], Citrini [3], Geymonat [6], Russo [11], von Fritz [12] e Zellini [13-14].

Sia Φ il rapporto fra diagonale e lato del pentagono regolare. Possiamo supporre che la Scuola avesse notato la relazione $\Phi = 1 + 1/\Phi$. Possiamo ritenere anche che i Pitagorici avessero dimostrato alcuni elementari risultati di aritmetica riguardanti la somma e il prodotto di due interi (per esempio, «la somma di due numeri dispari è pari e il prodotto di due numeri dispari è dispari»). Sulla base di questi presupposti, riteniamo che la Scuola avrebbe potuto fornire la seguente dimostrazione dell'irrazionalità di Φ.

Supponiamo, per assurdo, che Φ sia il rapporto fra due interi, cioè che sia $\Phi = \frac{a}{b}$ con $a>b>0$ ed a e b interi. Si può facilmente escludere il caso che a e b siano entrambi pari. Restano il caso a e b dispari e il caso a e b con parità diversa.

Si ha comunque $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$ e quindi $a^2-b^2=ab$.

Caso a e b dispari. Si ha che a^2-b^2 è pari mentre ab è dispari. Contraddizione.

Caso a e b con parità diverse. Si ha che a^2-b^2 è dispari mentre ab è pari. Contraddizione.

Dunque Φ non è della forma $\frac{a}{b}$ con a e b interi ed è pertanto un numero irrazionale (o, se si preferisce, lato e diagonale del pentagono regolare sono incommensurabili).

3. Il metodo sturmiano

Questo metodo, che cercheremo di chiarire qui di seguito, è molto utile e, a nostro parere, è il più adatto per presentare oggi agli studenti di liceo i numeri reali.

Per chiarezza espositiva, cominciamo con due esempi relativi alle rette $y=\frac{3}{2}x$ e $y=\Phi x$ dove $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

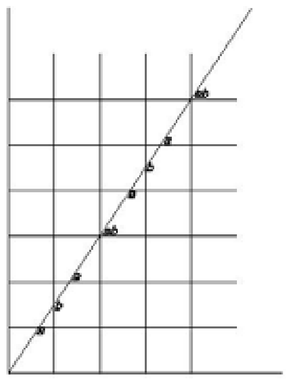

Figura 1.

Caso $y=\frac{3}{2}x$. Si scelga il punto P di coordinate $(1, \frac{3}{2})$, che è nel primo quadrante e sulla retta $x=1$. La retta $y=\frac{3}{2}x$ passa da O e anche da P.

Si osservi la Figura 1 nella quale, oltre alla retta $y=\frac{3}{2}x$, sono disegnate alcune rette orizzontali di equazione $y=h$ con h intero e alcune rette verticali di equazione $x=k$ con *k* intero. Si immagini un osservatore che parta *poco dopo* l'origine e, sempre restando sulla retta $y=\frac{3}{2}x$, proceda verso l'infinito prendendo accuratamente nota, come indicato in Figura 1, della successione delle rette orizzontali (l'osservatore scrive *a*) e verticali (l'osservatore scrive *b*) che via via incontra. Chiaramente la retta $y=\frac{3}{2}x$ passa anche per il punto *(2,3)*. Questo punto non è l'unico a coordinate intere, diverso dall'origine, per il quale passa $y=\frac{3}{2}x$. Infatti gli infiniti punti *(2n,3n)*, $n\geq 1$, appartengono tutti a $y=\frac{3}{2}x$. La parola scritta dall'osservatore *alla fine* del suo viaggio è una *parola infinita periodica* o, più precisamente, una *parola sturmiana periodica*. Infatti la retta $y=\frac{3}{2}x$ attraversa infiniti rettangoli tutti uguali a quello delimitato dai vertici *(0,0), (2,0), (2,3), (0,3)* e ciò che annota l'osservatore in ciascuno di questi infiniti rettangoli è sempre la stessa parola finita che pertanto verrà ripetuta infinite volte. C'è una precisazione da fare. Per i primi tre punti di intersezione la scelta fra *a* e *b* non pone alcun problema. Ma cosa deve scrivere l'osservatore quando si trova nel punto (2,3)? Dal momento che sta attaversando nello stesso istante sia una retta orizzontale (*y=2*) sia una retta verticale (*x=3*) deve scrivere certamente una parola di due lettere. Ma quale deve scegliere, *ab* oppure *ba*? Se sceglie *ab* dovrà nel seguito coerentemente continuare a scegliere *ab* in tutti gli infiniti punti *(2n,3n)* che incontrerà in seguito. Ugualmente dovrà continuare a scegliere nel seguito sempre *ba* in tutti gli infiniti punti *(2n,3n)* se questa è stata la sua scelta nel punto *(2,3)*. Il nostro osservatore scriverà *abaxy.abaxy.abaxy...* , cioè infinite volte *abaxy* dove *xy* è *ab* oppure *ba*. In altri termini il nostro osservatore scriverà *abaab.abaab.abaab...* oppure *ababa.ababa.ababa...* [2].

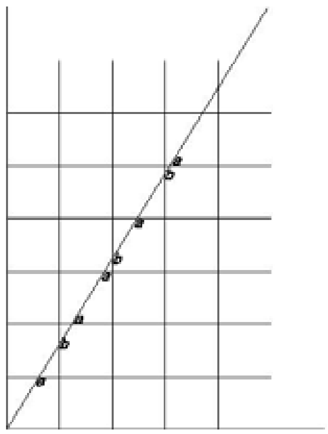

Figura 2.

Caso $y=\Phi x$. Si scelga ora il punto *P* di coordinate *(1,* Φ *)* che è nel primo quadrante e sulla retta *x=1*. Si veda la Figura 2. La retta $y=\Phi x$ passa da *O* e anche da *P*. Si immagini ancora un osservatore che parta poco dopo l'origine e, sempre restando sulla retta $y=\Phi x$, proceda verso l'infinito prendendo accuratamente nota, come nel caso precedente, della successione delle rette orizzontali (l'osservatore scrive *a*) e verticali (l'osservatore scrive *b*) che via via incontra. Chiaramente $y = \Phi x$ non passa per altri punti a coordinate intere diversi dall'origine (questa affermazione è una conseguenza dell'irrazionalità di Φ, già dimostrata). La parola, diciamo *f*, scritta dall'osservatore alla fine del suo viaggio è una parola che non è più periodica. Infatti è una parola sturmiana propria con una struttura più complessa di quella delle parole periodiche. Il nostro osservatore scriverà *abaababaabaab...* , e più precisamente, scriverà la parola di Fibonacci *f* che vedremo fra poco presentata in modo diverso.

Così come abbiamo fatto nei casi particolari del numero razionale $\frac{3}{2}$ e del numero irrazionale Φ, possiamo associare a ogni numero reale α una parola sturmiana (periodica o propria).

Più precisamente ai punti $(1,\alpha)$ con α razionale corrisponde una parola sturmiana periodica, cioè una parola infinita del tipo *wabwabwab...* mentre ai punti $(1,\alpha)$ con α irrazionale corrisponde una parola sturmiana propria (la parola di Fibonacci è l'esempio più conosciuto).

Le parole sturmiane sono, dunque, particolari rappresentazioni di un numero reale. I numeri razionali hanno una rappresentazione periodica, i numeri irrazionali hanno una rappresentazione aperiodica. Queste due rappresentazioni (così diverse!) insieme con le immagini delle *cutting sequence* possono aiutare lo studente a 'vedere' la differenza tra *razionale* ed *irrazionale*.

Segnaliamo infine Prodi [10] che contiene un interessante esercizio che è in stretta relazione con la nozione di parola sturmiana propria.

4. I numeri di Fibonacci

Nel *Liber abaci*, Fibonacci (Leonardo Pisano, detto anche Bigollo) proponeva, insieme con problemi utili per le attività di un mercante medioevale, anche una serie di esercizi aventi carattere più teorico o ricreativo. Uno di questi, introdotto dalla famosa domanda «Quante coppie di conigli saranno generati in un anno [a partire] da una sola...», conduce alla successione F_n dei numeri di Fibonacci *1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...* .

L'importanza della successione F_n è enorme in matematica e, in particolare, in informatica teorica. Ricordiamo, per esempio, che il limite per *n* che tende all'infinito del rapporto fra F_{n+1} ed F_n è esattamente Φ.

5. La parola infinita di Fibonacci

È studiata in *The art of computer programming* [4] e in [5]. Consideriamo un *alfabeto* di due sole lettere *{a,b}* e chiamiamo *parole* le sequenze (finite) di elementi di *{a,b}*. Abbiamo già visto la parola di Fibonacci come caso particolare di parola sturmiana propria. Vediamo ora altri due modi di definirla.

Le *parole finite* di Fibonacci si ottengono partendo da *a* e da *ab*. Un nuovo elemento è il prodotto dell'ultima e della penultima parola già ottenuta. Più esplicitamente si hanno le seguenti uguaglianze:

$$f_1 = a$$

$$f_2 = ab$$

$$f_3 = aba$$

$$f_4 = abaab$$

$$f_5 = abaababa$$

$$f_6 = abaababaabaab,$$

$$\ldots$$

Formalmente, in analogia con i numeri, si ha

$$fn+_2=fn+_1fn.$$

La *parola infinita* di Fibonacci f, cioè il limite delle parole finite di Fibonacci f_n, $n \geq 1$, è

$$f = abaababaabaababaababaabaababaabaababaababa\ldots.$$

Possiamo anche procedere sostituendo la a con ab e la b con a. Se iniziamo con $f_1 = a$, al passo successivo otteniamo $f_2 = ab$, poi $f_3 = aba$ e così via e, infine, passando al limite otteniamo sempre la parola infinita di Fibonacci già vista.

Notiamo che, per ogni intero n, la lunghezza di f_n è l'n-simo elemento F_n della successione dei numeri di Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377\ldots$.

Per ogni $n \geq 3$, denotiamo con g_n il prodotto $f_{n-2}f_{n-1}$ e denotiamo con h_n il più lungo fattore sinistro comune ad f_n ed a g_n. In particolare, abbiamo:

$$g_3 = aab$$

$$g_4 = ababa$$

$$g_5 = abaabaab,$$

$$\ldots$$

e

$$h_3 = a$$

$$h_4 = aba$$

$$h_5 = abaaba,$$

$$\ldots$$

Siano w_1, w_2,..., w_{n-1}, w_n lettere e sia w la parola $w_1w_2\ldots w_{n-1}w_n$. La parola $w_nw_{n-1}\ldots w_2w_1$ è detta *immagine speculare* di w. Una parola che coincida con la sua immagine speculare è una parola *palindroma*.

La seguente *near commutative property* è dovuta a Knuth. In generale, il prodotto di due parole non è commutativo. Per esempio, i due possibili prodotti di a e di b (cioè ab e ba) sono diversi e i due possibili prodotti di a e di ab (cioè aab e aba) sono diversi mentre i due possibili prodotti di *ab* e di *abab* coincidono (infatti sono entrambi *ababab*). Le parole finite di Fibonacci forniscono un interessante esempio di parole che *quasi commutano* nel senso che stiamo per precisare.

6. *Near commutative property*

Per ogni $n\geq 1$, le parole f_n *ed* f_{n+1} quasi commutano nel senso che i loro due possibili prodotti $f_{n+2}=f_{n+1}f_n$ *e* $g_{n+2}=f_nf_{n+1}$ hanno h_{n+2}, di lunghezza $F_{n+2}-2$, come prefisso comune e terminano l'uno con *ab* e l'altro con *ba.*

È utile soffermarsi sui casi particolari di f_3 e g_3, di f_4 e g_4, prima di fare la dimostrazione (facile) nel caso generale.

La parola infinita di Fibonacci ha moltissime altre proprietà che, come la *near commutative property*, possono essere spiegate in modo elementare. Per esempio: h_n è una parola palindroma; h_n è un prefisso (e anche un suffisso) comune a tutte le parole h_m tali che $m\geq n$; se in f troviamo un fattore u allora troviamo in f anche l'immagine speculare di u e, infine, la parola di Fibonacci è ricorrente (ciò significa che ogni fattore di f ha infinite occorrenze in f).

Il professore che abbia accuratamente presentato in classe la *near commutative property* può altrettanto accuratamente spiegare l'importanza che questa proprietà ha per l'algoritmo di Knuth, Morris e Pratt [5] di ricerca di una parola data in un testo dato. Sarebbe una buona occasione per chiarire concretamente i concetti di algoritmo e di efficienza di un algoritmo.

7. Brevissima annotazione sui codici

Riportiamo la consueta definizione di codice: «Sia A un alfabeto. Un insieme di parole non vuote X su A è un codice se per ogni $n,m\geq 1$ e per ogni $x_1,\dots, x_n, y_1,\dots, x_m$ in X la condizione $x_1\dots x_n=y_1\dots x_m$ implica $n=m$ *e*, per ogni i in $\{1,\dots, n\}$, $x_i= y_i$».

Questa nozione può essere ben spiegata a studenti di liceo. Inoltre, l'esigenza, che spesso si ha, di trasmettere messaggi in modo discreto costituisce, specialmente per gli adolescenti, un'ottima motivazione per apprendere una delle nozioni fondamentali dell'informatica teorica.

Alcune relazioni tra parola di Fibonacci e teoria dei codici sono presentate in [9].

8. Nuove coppie di segmenti incommensurabili

Introduciamo le seguenti definizioni:

- diciamo diagonali *medie* di un ottagono regolare quelle che lo dividono in un trapezio e in un esagono;
- diciamo diagonali *corte* di un decagono regolare quelle che lo dividono in un trapezio e in un ottagono;
- diciamo diagonali *corte* di un dodecagono regolare quelle che lo dividono in un trapezio e in un decagono;
- diciamo diagonali *lunghe* di un dodecagono regolare quelle che lo dividono in

un esagono e in un ottagono.

Le intersezioni delle diagonali medie di un ottagono individuano i vertici di un altro ottagono (Figura 3) che diremo *generato* dalle diagonali medie. Analogamente per il decagono regolare (Figura 4) costruiamo un decagono regolare generato dalle sue diagonali corte e per il dodecagono regolare costruiamo un dodecagono regolare generato dalle sue diagonali corte (Figura 5) e un dodecagono regolare generato dalle sue diagonali lunghe (Figura 6).

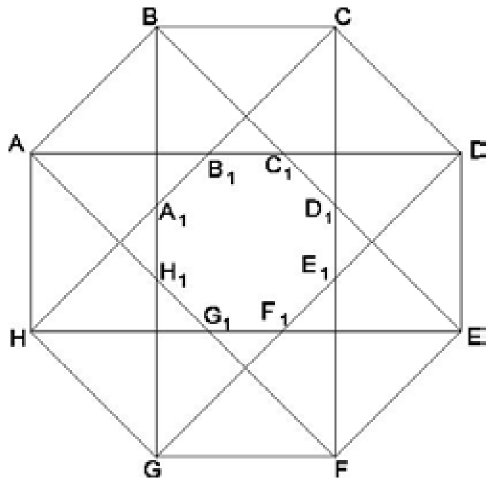

Figura 3.

Proposizione 3. «Sia *Ot* un ottagono regolare e sia *Ot'* l'ottagono che si ottiene tracciando le sue diagonali medie. Allora i lati di *Ot* e di *Ot'* sono incommensurabili»

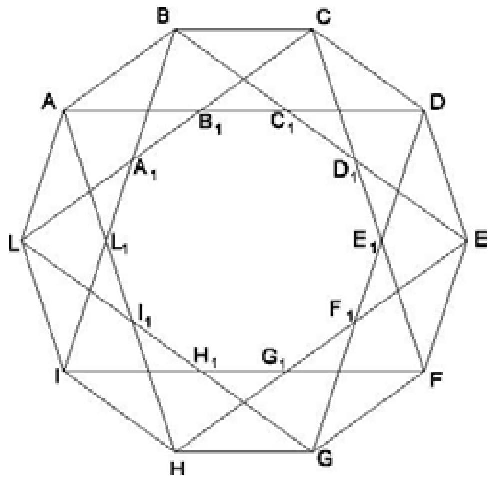

Figura 4.

Proposizione 4. «Sia *De* un decagono regolare e sia *De'* il decagono che si ottiene tracciando le sue diagonali corte. Allora i lati di *De* e di *De'* sono incommensurabili»

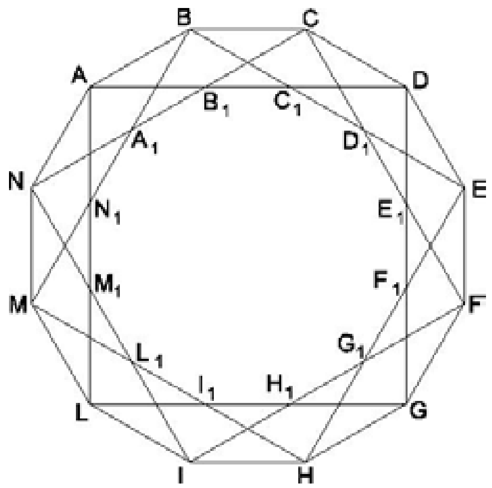

Figura 5.

Proposizione 5. «Sia *Do* un dodecagono regolare e sia *Do'* il dodecagono che si ottiene tracciando le sue diagonali corte. Allora i lati di *Do* e di *Do'* sono incommensurabili»

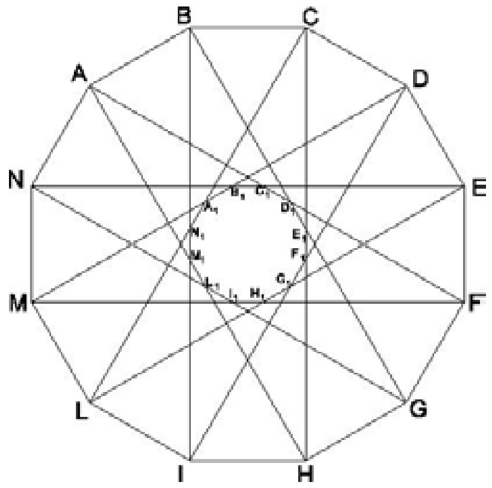

Figura 6.

Proposizione 6. «Sia *Do* un dodecagono regolare e sia *Do'* il dodecagono che si ottiene tracciando le sue diagonali lunghe. Allora i lati di *Do* e di *Do'* sono incommensurabili»

Le *Proposizioni* 3, 4, 5 e 6 sono dimostrate in [7].

Anche in questa breve versione preliminare non può mancare un riferimento alle *frazioni continue*. Questo tema e quello delle *equazioni diofantee* saranno più adeguatamente sviluppati nella versione definitiva.

9. Frazioni continue

In generale una *frazione continua aritmetica* o, semplicemente, frazione continua è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

che possiamo anche scrivere $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

In [8] abbiamo visto che l'argomento che conduce alla dimostrazione dell'incommensurabilità di *BC* e B_1C_1 (Figura 3) è anche utile per trovare lo sviluppo in frazione continua di $\sqrt{2}$. I rapporti fra numeri consecutivi di Fibonacci forniscono approssimazioni di Φ. Più precisamente, al crescere dei valori di *n* il rapporto tra F_{n+1} ed F_n approssima sempre meglio Φ che in frazioni continue è $[1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Note

[1] Questo articolo... era scritto in TeX.

[2] La necessità di essere coerenti nella scelta di *ab* o *ba* nei punti a coordinate intere può essere spiegata... con un piccolo spostamento della retta $y = \frac{3}{2}x$ verso il basso (*ba*) o verso l'alto (*ab*)!

Ringraziamenti

Ringrazio il Dipartimento di Matematica Ulisse Dini per la generosa ospitalità che mi concede. Ringrazio J. Justin per le utilissime conversazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] Acerbi, F., *Euclide (Tutte le Opere)*, Bompiani, Milano 2008.

[2] Boyer, C.B., *A history of mathematics*, Wiley and Sons, New York 1968.

[3] Citrini, C., *Da Pitagora a Borges (Discussioni in rete sull'infinito)*, Bruno Mondadori, Milano 2004.

[4] Knuth, D.E., *The art of computer programming*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1968.

[5] Knuth, D.E., Morris, J.H., Pratt, V.R., Fast pattern matching in strings, *SIAM J. Comput.*, 6, 1977, pp. 323-350.

[6] Geymonat, L., *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, *Volume Primo, L'antichità - Il Medioevo*, Garzanti Editore, Milano 1970.

[7] Pirillo, G., Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili, *Nuova Secondaria*, 7, 2005, pp. 97-103.

[8] Pirillo, G., Sulla frazione continua di $\sqrt{2}$, *Archimede*, 4, 2005, pp. 197-198.

[9] Pirillo, G., Some factorizations of the Fibonacci word, *Algebra Colloq.*, 6, 1999, 4, pp. 361-368.

[10] Prodi, G., Spunti didattici tratti dalla geometria dei numeri, Atti del Quindicesimo Convegno sull'insegnamento della matematica, *Notiziario Unione Matematica Italiana*, Supplemento n. 5, Maggio 1993.

[11] Russo, L., *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano 2001.

[12] Von Fritz, K., The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Ann. of Math.*, 46 (n. 2), 1945, pp. 242-264.

[13] Zellini, P., *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1993.

[14] Zellini, P., *Gnomon*, Adelphi, Milano 1999.