Kant e la matematica*

Alberto Peruzzi

Università di Firenze

1. Introduzione

Nato nel 1724 e morto nel 1804, Immanuel Kant è noto per essere il filosofo del "criticismo", teorizzatore della "rivoluzione copernicana" in filosofia e ideatore del metodo "trascendentale" come strumento per fondare l'oggettività delle scienze naturali; è colui che ha visto nel motto *Sapere aude!* l'espressione degli ideali illuministici ed è anche il padre del temibile "imperativo categorico" in ambito morale.[1] Kant ha ipotizzato che l'origine del nostro sistema solare sia dovuta a un processo di accorpamento da una nube di gas e polveri, così come ha elaborato una complessa teoria estetica che distingue il bello dal sublime. Ha affrontato i più diversi argomenti ma è stato, in particolare, e non poteva evitare di esserlo, un filosofo della matematica, alla quale ha dedicato pagine che tutt'oggi fanno discutere.

Della matematica Kant ha trattato in vari scritti, ora parlandone in generale ora entrando in dettagli anche minuti. Nel corso degli anni è tornato più volte su uno stesso tema, precisando il senso delle sue osservazioni in merito. Qui, per semplicità espositiva, conviene privilegiare la più famosa, fra le opere in cui Kant ne parla, anche se non è un testo che entra in dettagli di carattere matematico. Questo testo è la *Critica della ragion pura*, che uscì in prima edizione nel 1781 e in seconda (rivista e ampliata) nel 1787. Che uno ne condivida o no le tesi, l'impianto o le specifiche argomentazioni, la *Critica della ragion pura* è uno dei più importanti testi filosofici che siano mai stati scritti. In quest'opera viene esposta una filosofia della matematica che differisce, per più aspetti, da tutto quanto era stato scritto prima al riguardo e soprattutto differisce dai modi in cui si parlava della matematica ai tempi di Kant.

Aritmetica e geometria fanno parte della matematica e il carattere delle conoscenze aritmetiche e geometriche è inteso da Kant come paradigmatico per tutta la matematica. Ora, qual è la natura delle verità che s'incontrano in aritmetica o in geometria? Ci vuole poco a rendersi conto che attribuiamo loro uno status diverso da quello delle verità logiche, da quello delle verità fisiche e da quello delle verità filosofiche. Come esempio di verità logiche Kant avrebbe addotto il principio di identità (*ogni cosa è uguale a se stessa*) e il principio di non-contraddizione (*non è possibile che sia vera la proposizione p e sia vera la proposizione non-p*); come esempio di verità fisica, avrebbe

* Lezione tenuta a Massa il 5 novembre 2009, presso il Teatro dei Servi, nell'ambito dell'edizione 2009 di *Pianeta Galileo*.

addotto il secondo principio della dinamica newtoniana ($F = ma$); e come esempio di verità filosofica? Be', qui si poteva discutere … essendoci scarso accordo fra i filosofi, ma di sicuro avrebbe potuto addurre le proposizioni filosofiche argomentate da lui stesso nella *Critica della ragion pura.* A ogni modo, le verità filosofiche – ammesso che ci siano e qualunque esse siano – sono generalmente considerate diverse da quelle della matematica. D'accordo, direte, ma cos'è che contraddistingue le verità matematiche rispetto a tutte le altre?

Questo è, appunto, uno dei problemi che Kant si pone. Per affrontarlo, mette in campo la sua impostazione generale, incentrata, prima che sulla verità o no di un'asserzione riguardo a qualcosa, sulla conoscenza che ne abbiamo, la quale fonda tale asserzione. Innanzitutto, Kant rileva che ci sono tipi diversi di *conoscenza* e, per l'esattezza, ce ne sono tre: una conoscenza di tipo puramente razionale, cui il nostro intelletto arriva per conto suo senza bisogno d'altro che saper comporre e scomporre i concetti; una conoscenza di tipo empirico, che ha bisogno di osservazioni ed esperimenti; e una conoscenza intuitiva che è al contempo conoscenza a priori, ovvero non-ricavata da esperienze. In quale di questi tre tipi di conoscenza rientra la matematica? Kant argomenta che la conoscenza matematica non rientra nei primi due tipi di conoscenza: non è un prodotto del puro raziocinio e non è neppure ricavata da dati empirici. Dunque resta solo una possibilità: che la matematica sia intuitiva e a priori e, conseguentemente, le verità che in essa si trovano avranno uno status molto particolare.

Vediamo più da vicino come fa ad arrivarci e cerchiamo di precisare il senso di quest'idea, cominciando con alcuni esempi che aiutano a capire la differenza che c'è tra due tipi fondamentali di verità.

> Verità di tipo 1
> *I pianeti sono pianeti.*
> *I gatti bianchi sono bianchi.*
> *I cassetti pieni non sono vuoti.*
> *I corpi sono estesi.*
>
> Verità di tipo 2
> *I pianeti sono nove.*
> *Alle ore 11 del 16 ottobre 2009 non è caduto un fulmine sul Ponte Vecchio.*
> *I cassetti della mia scrivania sono pieni.*
> *I corpi sono pesanti.*

Nel gergo filosofico, le verità di tipo 1 si chiamano "analitiche" e le verità di tipo 2 "sintetiche". Le proposizioni di tipo 1 sono dette analitiche perché risultano vere in base alla sola analisi dei concetti. Per esempio, l'essere bianco è una proprietà "analitica" dei gatti bianchi, perché nel concetto di *gatto bianco* è già incluso il concetto di *bianco*: basta analizzare i componenti del concetto di *gatto bianco* per rendersi conto che esso si scompone in *gatto* e in *bianco*. Riferita alle proposizioni di forma soggetto-predicato, l'idea di Kant è che analitiche sono quelle verità in cui il concetto espresso dal predicato è già *contenuto* nel concetto espresso dal soggetto. Kant dice, più brevemente, che i giudizi analitici sono quelli in cui “il predicato è contenuto nel soggetto” (parla di “giudizi” e non di “proposizioni”, ma ai nostri fini non è essenziale la precisazione della differenza). Sintetiche saranno, di conseguenza, le proposizioni in cui quando si pensa il soggetto non è detto che si pensi anche il predicato.

Fin qui è emersa una differenza fra due tipi di *verità*. Alla differenza tra analitico e sintetico se ne aggiunge un’altra, riguardante i due modi possibili di *conoscere* una qualsiasi verità. Ci sono infatti le verità note a priori e le verità note a posteriori.

Le verità a priori sono necessarie, cioè, hanno la seguente caratteristica: è impossibile che loro negazione sia vera. Dunque, sono incontrovertibili. L’esempio di Kant è proprio *I corpi sono estesi,* cioè, tutti i corpi, in quanto materiali, occupano necessariamente un volume di spazio: il concetto di essere esteso è già implicito nel concetto di corpo, dunque non può esserci un corpo che sia inesteso.

Le verità a posteriori sono, invece, contingenti: è possibile che la loro negazione sia vera, anche se di fatto sono vere. Dunque le verità a posteriori sono controvertibili.

Incrociando la prima distinzione con la seconda abbiamo quattro possibili classi di verità:

	A priori	A posteriori
Analitiche	Tipo 1	....
Sintetiche	....	Tipo 2

Per come si sono impostate le cose, tutte le verità di tipo 1 risultano a priori, ma non danno alcuna informazione sul mondo. Anche se m’inventassi una nuova specie di animali, i grublodandi, potrei dire *I grublodandi monogami sono grublodandi* e la dovrei considerare una verità analitica, senza con ciò sapere se al mondo ci sono o non ci sono grublodandi, così come voi non siete tenuti a sapere se effettivamente è vero o no che i cassetti della mia scrivania sono pieni per poter riconoscere la verità di *I cassetti pieni non sono vuoti.*

Invece, tutte le verità di tipo 2 danno informazioni sul mondo, ma … non sono *necessariamente* vere. Anche se è vero che i pianeti del nostro sistema solare sono nove (volendo considerare un pianeta anche Plutone), non era escluso che potessero essere otto, oppure dieci. Anche se il giorno … non è caduto nessun fulmine sul Ponte Vecchio, poteva anche cadere, ecc.

Resta da stabilire cosa mettere al posto dei puntini nella prima e nelle seconda riga della tabella. Nel caso della prima riga la soluzione è facile: se una verità è tale perché il soggetto comprende già in sé il predicato, allora non c'è bisogno di fare alcuna osservazione. E viceversa: se per affermare una proposizione come vera c'è bisogno di fare osservazioni (dunque c'è bisogno di dati ricavati dall'esperienza), allora non può trattarsi di una verità analitica. Perciò, non esistono verità analitiche a posteriori. La classe delle verità analitiche a posteriori è vuota.

Nel caso della seconda riga, la soluzione non è facile. Esistono verità a priori non di tipo 1? Cioè, esistono verità sintetiche a priori? La risposta di Kant è: sì, esistono. E quali sono? Sono appunto le verità che si trovano in matematica, più i principi che stanno alla base della cinematica pura, più eventuali altri principi che stiano a fondamento di tutte le conoscenze che abbiamo della natura. Qui ci interessa solo la matematica e perciò non saranno considerate altre verità che quelle matematiche.

2. Il tempo e l'aritmetica

Per Kant, la matematica pura si articola in tre grandi aree: l'aritmetica, la geometria e l'algebra. In aritmetica si incontrano verità come $7 + 5 = 12$. In geometria, si trovano i teoremi dimostrati negli *Elementi* di Euclide. In algebra si trovano i metodi per risolvere vari tipi di equazioni. E l'analisi? Non è che Kant le riservi quell'attenzione che già alla metà del Settecento ci saremmo aspettato. Forse la collegava strettamente alla cinematica pura e a quella che oggi indichiamo come meccanica razionale. Comunque, le questioni che Kant pone intorno alle aree della matematica da lui esplicitamente considerate bastano e avanzano per mettere a fuoco l'idea che aveva della matematica. La sua tesi fondamentale è che le verità matematiche sono sintetiche a priori. La prima grande domanda è dunque: *perché le verità matematiche sono sintetiche a priori?* La risposta di Kant s'incentra su una fondazione epistemica della matematica, ovvero, sul ruolo che la matematica occupa nel sistema della conoscenza umana.

Ci sono due forme dell'intuizione: spazio e tempo. Alla struttura dello spazio corrisponde l'insieme di conoscenze che fanno parte della geometria; alla struttura del tempo corrisponde l'insieme di conoscenze che fanno parte dell'aritmetica. La struttura dello spazio potrà non essere esaurita dalla geometria e la struttura del tempo potrà non essere esaurita dall'aritmetica, ma sicuramente geometria e aritmetica colgono aspetti centrali delle rispettive strutture.

Che la geometria riguardi lo spazio non desta problemi. Che l'aritmetica riguardi il tempo, non è altrettanto scontato. Alla base dell'aritmetica ci sono i numeri. E alla base dei numeri c'è il processo del "contare", inteso come iterazione ricorsiva dell'operazione «aggiungere 1». Ora, un processo del genere – argomenta Kant – ha a che fare con una serie di passi *successivi*, dunque nel tempo. Il tempo, aveva detto Leibniz, è l'ordine della successione; e anche se Kant non sottoscriveva in tutto e per tutto la concezione leibniziana, intendeva il tempo come una totalità infinita, ordinata linearmente, di istanti che *si succedono* dal prima al poi. Per Kant la nozione di tempo è a priori, è presupposta da qualunque esperienza di noi stessi, non è un concetto bensì una forma dell'intuizione e, più specificamente, è "la forma del senso interno". Ciò che corrisponde a tale forma è una totalità continua.

Queste proprietà ascritte al tempo non sono prese come assiomatiche o definitorie: sono argomentate nelle pagine dell'*Estetica.* Per accettarle o rifiutarle, bisognerebbe dunque entrare nel merito degli argomenti addotti da Kant. Non potendo entrare nel merito per ragioni … di tempo, vi chiedo di prenderle come ipotesi.

Il ragionamento che ha condotto dalla nozione di numero alla nozione di tempo presuppone che ci si riferisca ai numeri naturali (**N**), ottenuti a partire da zero aggiungendo un'unità alla volta. Si genera così una totalità *discrèta* – fra il numero n e il numero $n+1$ non c'è nessun numero naturale. Ma oltre ai naturali, ci sono gli interi (**Z**), i razionali (**Q**) e i reali (**R**), che non si ottengono iterando l'operazione di «aggiungere 1», ma che possono disporsi tutti quanti in uno stesso ordine lineare. Già qui cominciano ad affiorare i problemi. Evitando di entrare in questioni tecniche, emergono due difficoltà fondamentali.

La prima difficoltà consiste nel fatto che Kant fonda sul tempo il concetto di numero che sta alla base dell'aritmetica, ma il tempo è un *continuo*, non qualcosa di *discrèto*. La seconda difficoltà è che, anche limitandosi ai numeri naturali, le verità dell'aritmetica non sono ricondotte da Kant a una lista finita di assiomi sulla nozione di numero, come invece le verità della geometria, che sono riconducibili agli assiomi (postulati) del sistema euclideo. La formulazione degli assiomi dell'aritmetica arriverà solo nell'Ottocento, con Dedekind e Peano. Se volessimo una corrispondenza adeguata tra il tempo come continuo e la nozione di numero, dovremmo affidarci non alla struttura dei numeri naturali, ma a quella dei numeri reali. Purtroppo, la nozione di numero reale non era chiara ai tempi di Kant, né lo era la nozione di continuità. Bisognerà aspettare Cauchy, Weierstrass, Cantor e ancora Dedekind per avere un quadro preciso.

Come si poteva rimediare in presenza di queste lacune? Un primo rimedio poteva consistere nel discretizzare il tempo. Dopotutto, il nostro senso della continuità potrebbe essere il risultato di una elaborazione analoga a quella che ci fa percepire un film invece di una sequenza *discrèta* di fotogrammi. La discretizzazione potrebbe piacere a uno psicologo, non però a chi vuole fare del tempo anche un concetto basilare della fisica, che era per Kant il modello di scienza e aveva in Newton il suo campione. La meccanica sfruttava la grandezza "tempo" come avente valori *reali*, dunque fin dall'inizio come qualcosa di *continuo.* Un secondo rimedio poteva essere quello di intendere "numero" in senso lato e non più unicamente come numero naturale. A questo proposito, Kant parla di "*arithmetica generalis*", da associarsi a una teoria pura del tempo che include propriamente l'aritmetica come consuetamente intesa. In tal caso, però bisogna ammettere che i numeri non si ottengono iterando l'aggiunta di un'unità alla volta. Questo processo funziona solo per un tipo particolare di numeri – un tipo che non si capisce bene come isolare partendo dal tempo come continuo. Infine, un terzo rimedio poteva consistere nel puntare decisamente sulla *costruttività* dei ragionamenti sui numeri, in modo coerente con quanto Kant dice sul metodo matematico, da lui riconosciuto come essenzialmente diverso dal metodo filosofico, e anche in modo coerente con la costruttività che attribuisce alle costruzioni geometriche. Adottando questo terzo rimedio, c'è però un prezzo da pagare, per comprendere il quale conviene prima illustrare quel che succede nel caso della geometria.

3. Lo spazio e la geometria

Kant individua una serie di caratteri che, congiuntamente presi, dovrebbero fornirci le proprietà intrinseche dello spazio: lo spazio è dato a priori, è presupposto da ogni intuizione di qualcosa di esterno, non è un concetto ma una forma dell'intuizione e, più precisamente, è la "forma del senso esterno"; infine, lo spazio è una molteplicità estesa, continua, infinita, omogenea ed isotropa.

Da tali caratteri si deducono i principi della geometria euclidea? La risposta è negativa. Nel caso del tempo, ci siamo ritrovati a dover passare dall'aritmetica alla teoria dei numeri reali (che non è ancora l'analisi). Supponendo di dover fare l'analogo per quanto riguarda il rapporto tra spazio e geometria, dovremmo passare dalla geometria alla… *topologia*. Kant fa riferimento a una "teoria pura dello spazio", come più comprensiva della geometria, ma non si sofferma a elaborarne i contenuti. In precedenza, Leibniz aveva parlato di *analysis situs*, come teoria degli aspetti più generali della "posizione" (si suppone: aspetti indipendenti dalle misure, dunque precedenti all'introduzione di una metrica). Si dovrà attendere Poincaré e Haussdorf per avviare lo studio della topologia; e questo avverrà un secolo dopo Kant. Tuttavia, Kant stesso pone una serie di quesiti che oggi riconosciamo appartenenti di diritto alla topologia.

Un primo quesito riguarda il concetto di *dimensione*. Perché lo spazio fisico è tridimensionale? Kant se lo chiede in relazione alla legge di gravitazione universale, secondo cui l'attrazione esercitata da un corpo sull'altro è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa. Un secondo quesito riguarda l'orientabilità, così come risulta da un saggio del 1768 che Kant dedica al problema degli oggetti enantiomeri, o enantiomorfi (il termine kantiano è "opposti incongruenti"): pensate, per esempio, alla mano destra e alla mano sinistra.

Quanto al primo quesito, Kant cerca di dimostrare che la legge di gravitazione universale implica la tridimensionalità dello spazio, ma non riesce a dimostrarlo e qualche anno dopo la pubblicazione della *Critica della ragion pura* ammetterà:

> la stessa essenza reale dello spazio e del tempo e il fondamento primo per cui a quello convengono tre dimensioni, mentre a questo ne conviene una sola, ci sono imprescrutabili (Lettera a Reinhold, 12 maggio 1789).

Quanto al secondo quesito, già nel 1768 Kant aveva impostato l'analisi delle simmetrie e delle asimmetrie, che s'incontrano in natura, con l'intenzione di mostrare che una concezione relazionista dello spazio (come era quella di Leibniz) non può darne conto, senza con ciò avallare la tesi newtoniana circa l'esistenza di uno spazio assoluto, che resterebbe dopo aver tolto tutti i corpi, dotato di una serie di proprietà non meno assolute. La differenza tra una mano destra e una mano sinistra non è dovuta alle relazioni tra corpi, ma l'esser una mano destra o sinistra non è neppure una proprietà "in sé" di una certa regione di spazio. E allora? Il criticismo gli offrirà una cornice per uscire da questo stallo: possiamo avere conoscenza soltanto dei fenomeni, e non del mondo come è in sé. Lo spazio (come pure il tempo) è il nostro formato-base per rappresentarci quel che è accessibile fuori di noi, non quanto sta sotto a ciò che è accessibile.

Restando all'ambito "metrico", ci sono due difficoltà:

- la prima difficoltà è dovuta alla successiva scoperta delle geometrie non-euclidee, relative a spazi a curvatura costante: la geometria iperbolica di Bolyai-Lobacevskij (curvatura negativa) e la geometria ellittica di Riemann (curvatura positiva), che si aggiungono alla geometria euclidea (corrispondente al caso di uno spazio a curvatura nulla);
- la seconda difficoltà è dovuta all'uso di una geometria non-euclidea da parte di Einstein nella formulazione della teoria generale della relatività.

La prima difficoltà è di natura puramente matematica, la seconda riguarda la fisica. Quanto alla prima difficoltà, è bene evitare un fraintendimento ricorrente. Kant non pensava che la geometria euclidea fosse l'unica logicamente possibile. Se avesse pensato questo, avrebbe dovuto dire che le verità della geometria (euclidea) sono analitiche. Invece ha detto che sono sintetiche. Egli stesso anticipa l'ipotesi di sistemi alternativi, ma respinge quest'ipotesi in quanto, anche se logicamente coerente, colliderebbe con la struttura a priori della nostra sensibilità. In breve: il carattere euclideo dello spazio è scritto nell'architettura del nostro sistema operativo. Alla fine dell'Ottocento, Poincaré conserverà l'idea che esistano verità sintetiche a priori sostenendo allo stesso tempo che l'adozione di una geometria piuttosto che un'altra è convenzionale, dunque libera, ma non arbitraria, nel senso che sarà scelta la geometria più semplice; e per lui la geometria euclidea è la più semplice in assoluto.

La seconda difficoltà è quella essenziale, perché la mera esistenza di sistemi geometrici alternativi, come curiosità matematiche mai utilizzate nella scienza della natura, non sarebbe bastata a mettere in crisi la concezione kantiana dello spazio. Se invece la fisica ha bisogno di una geometria non-euclidea, come si fa a dire che la geometria euclidea corrisponde al modo in cui ci rappresentiamo tutto ciò che è fuori di noi?

Anche qui un'avvertenza: la geometria usata nella relatività generale non è quella di uno spazio a curvatura costante non-nulla. Lo spaziotempo relativistico, allorché si tenga conto della gravità, ha una curvatura variabile, in funzione della stessa intensità del campo gravitazionale. Questo non significa ancora che si può ricavare per induzione, osservando e poi ancora osservando, quale sia la geometria "vera", ma certo non si può più dire che la geometria *vera* è fissata a priori una volta per tutte. C'è una famosa frase di Einstein che coglie il punto della questione: «Nella misura in cui le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, non sono certe; e nella misura in cui sono certe, non si riferiscono alla realtà».

4. L'algebra

Dopo l'aritmetica e il suo rapporto problematico con il tempo, dopo la geometria e il suo rapporto problematico con lo spazio, dopo l'analisi e il non meno problematico silenzio di Kant al riguardo, resta l'algebra. In algebra non si parla esclusivamente di grandezze numeriche specifiche e non si ricorre a figure e diagrammi. Eppure, anche in algebra si eseguono *costruzioni* e, per Kant, la matematica è caratterizzata dal fatto di essere la disciplina in cui ogni concetto usato, se non è un primitivo intuìto come tale, è accompagnato dalla sua costruzione. Ma quale tipo di costruzioni troviamo nell'algebra? Nella *Critica della ragion pura* (B 762) Kant afferma:

> Lo stesso procedimento dell'algebra è una costruzione secondo caratteri.

Che cosa significa "secondo caratteri"? Leibniz aveva progettato una *characteristica universalis* come ideale ambiente simbolico in cui rappresentare la combinatoria di tutti i concetti. Il termine "carattere" qui è usato nello stesso senso in cui oggi parliamo dei caratteri a stampa: lettere, simboli, ideogrammi o quel che si vuole. In algebra si manipolano simboli, senza preoccuparsi che ciascuno di essi sia il nome di una specifica grandezza.

Posso capire $a^2 - b^2$ senza bisogno di sapere per che cosa stanno a e b. Anzi, posso trovare a che cosa si riferiscono certi simboli (quelli, come x, y, z, che stanno per le "incognite") eseguendo una serie di passaggi algebrici — vedi i metodi per risolvere un sistema di più equazioni. Arrivo alle radici di un'equazione sfruttando le proprietà delle operazioni coinvolte (associatività della somma, distributività del prodotto sulla somma, ecc.) e individuando una formula risolutrice, che è la stessa in ogni caso, una volta fissato il grado di un'equazione. Sembra che in tutto ciò non ci sia alcuna intuizione a priori. Allora Kant si sarebbe sbagliato a dire che le verità matematiche trovano il loro fondamento in intuizioni a priori? Ma qui l'intuizione sta nella *costruzione per caratteri*, non nei caratteri, dunque sta nel cogliere le regole algebriche senza bisogno di sapere per che cosa stanno le x e le y.

Se si trattasse di una forma autonoma d'intuizione rispetto allo spazio e al tempo, allora Kant avrebbe potuto fare un piccolo passo in più e dirci che gli stessi principi *logici* si fondano su questo tipo d'intuizione. In tal caso, però, le verità logiche non sarebbero più analitiche, ma sintetiche. Invece, Kant non solo non fa questo piccolo passo in più, ma si guarda bene dal dire che si tratta di una forma autonoma d'intuizione. Dunque, resta solo una possibilità: che in algebra si sfruttano le risorse costruttive presenti in aritmetica e geometria, esercitandole però non più su grandezze numeriche o geometriche, ma su simboli che possono stare per arbitrarie grandezze. Sparito il gatto, si continua a vedere il suo sorriso, come in *Alice nel paese delle meraviglie*. È uno stratagemma di enorme efficacia, perché può essere di volta in volta iterato, conseguendo livelli di astrazione crescente che sfruttano sempre la stessa capacità di "costruire per caratteri".

5. Alcune questioni conclusive

Nelle considerazioni precedenti sono implicite varie domande, e difficoltà, che portano fuori dal quadro kantiano e sulle quali ancor oggi si lavora, partendo dal diffuso riconoscimento che Kant ha sbagliato sul tale e talaltro punto, si è dimenticato di aggiornarsi e si è lasciato fuorviare dal modello newtoniano di scienza... Ci sono anche altre domande, e difficoltà, *sotto l'ipotesi che tutto sia a posto nella trattazione kantiana della matematica*. Per prima cosa, ciò significa supporre che ci siano tutti gli assiomi che servono. Anche supponendo questo, e già nel caso della geometria, ci rendiamo subito conto che non bastano i soli assiomi. Le conoscenze geometriche non si esauriscono nella lista degli assiomi (siano quelli euclidei o altri). Perché non si esauriscono? Sembra una domanda peregrina, ma segnala invece un problema fondamentale tanto per la matematica quanto per la filosofia.

Kant afferma (*Critica della ragion pura*, B 14):

> I giudizi matematici sono tutti sintetici.

Molte pagine dopo, aggiunge (*ivi,* B 740):

> La conoscenza filosofica è conoscenza razionale per concetti. La conoscenza matematica è conoscenza razionale per costruzione di concetti.

La prima affermazione (B 14) implica che anche una banale identità come $a = a$, nell'ambito del ragionamento matematico, non è più una verità analitica. Il motivo di ciò è indicato da Kant nel fatto che è coinvolta l'intuizione/costruzione di *a.* Se è così, allora sembra proprio che ci sia un problema interno al quadro kantiano, perché nel caso dell'algebra non si richiede di intuire le grandezze corrispondenti ai simboli. Anche trovando un modo per risolvere coerentemente questo problema, ne sorge subito un altro: Kant avrebbe dovuto bloccare ogni progetto, come quello leibniziano, di trattare algebricamente i concetti (un progetto poi ripreso sistematicamente da Boole), perché in tal caso una verità come *I gatti siamesi sono mammiferi* comporta una costruzione per caratteri e in tal caso sarebbe sintetica, mentre Kant l'avrebbe considerata analitica.

Lo sviluppo della logica matematica nel Novecento ha portato all'idea che sia possibile ridurre tutta la matematica a logica, sottintendendo che i principi logici *sono* analiticamente veri. Anche per Kant i principi logici sono analitici, ma la matematica non è riducibile a logica. Molti oggi sostengono che il progetto di riduzione della matematica a logica sia fallito e fra questi molti c'è anche chi contesta che i principi logici siano analitici. Chi lo contesta, tende a riproporre in veste nuova l'idea base di Kant. Perciò, a dispetto delle difficoltà che ho segnalato, la sua lezione non è morta.

La seconda affermazione (B 740) ci riporta a quanto detto sulle costruzioni geometriche e sulle manipolazioni algebriche di simboli, ma si applica anche agli specifici calcoli numerici. Il luogo dell'intuizione in matematica non è confinato a cogliere le nozioni primitive e le relazioni-base in cui stanno le une con le altre nozioni (relazioni espresse da assiomi). Ci sono da considerare anche le 'costruzioni' che si effettuano all'interno delle teorie assiomatiche, in ogni ambito della matematica. E queste costruzioni riguardano tanto le *dimostrazioni* quanto le *definizioni.*

Il guaio è che, se prendiamo sul serio tale requisito kantiano, ne risente lo stesso pacchetto di schemi logici di cui ci serviamo per ragionare in matematica: ogni risultato matematico deve essere provato in maniera costruttiva. In tal caso, sono da escludere i risultati ottenuti ragionando per assurdo e dunque sfruttando il principio logico del terzo escluso: *per ogni proposizione p*, o *è vera p o è vera non-p.* Se infatti voglio affermare la verità di *p*, in matematica, devo provare *p*. Se non so provare *p*, non è detto che io sappia provare *non-p.* Dunque il requisito kantiano è molto selettivo. Per coerenza, Kant avrebbe dovuto respingere alcuni risultati della matematica del suo tempo che invece accettava in blocco come verità sintetiche a priori.

Infine, *ammettiamo* che ci siano conoscenze filosofiche. Allora esistono verità puramente concettuali, cui la ragione umana giunge senza bisogno di fare osservazioni ed esperimenti. In quanto puramente concettuali, queste verità dovrebbero essere analitiche. Ma se sono tutte quante analitiche, allora la filosofia si riduce a logica (più qualche bella definizione). Se ci sono conoscenze filosofiche che non sono soltanto logiche, allora quali sono? Kant era convinto che ci fossero. Erano le conoscenze raggiunte con un metodo speciale, cui dette il nome di "metodo trascendentale".

Il metodo trascendentale è essenzialmente un metodo regressivo: da ciò che è dato a ciò che ne è la condizione di possibilità. Esempio: data la seconda legge della dinamica, che cosa dobbiamo presupporre per renderne possibile la conoscenza? Altro esempio: data la comune esperienza di oggetti intorno a noi, che cosa rende possibile quest'esperienza? Sono appunto domande "trascendentali" ed esigono risposte dello stesso tipo.

Le conoscenze matematiche sono, per Kant, a priori ma non sono trascendentali. Quelle filosofiche sono a priori e trascendentali, perché specificano le condizioni di possibilità del sapere matematico. Questa è una prima netta differenza tra filosofia e matematica. Ci sono anche altre differenze, che Kant descrive con chiarezza.

Ora, c'è un solo discorso filosofico che prescinda dall'*uso* di nozioni di tipo spaziale e temporale? Se non è possibile prescinderne, la differenza non può essere così netta come voleva Kant e allora sorge la questione se anche il discorso filosofico debba o non debba essere *costruttivo.* Direte che l'analisi filosofica non è in forma assiomatica come la geometria e, prima ancora, non è in simboli. Semmai, l'analisi filosofica è condotta *sui* sistemi assiomatici che si trovano in matematica e indaga cosa li rende possibili. D'accordo, ma tra le condizioni di possibilità c'è anche la *coerenza* (non-contraddittorietà) e l'indagine che porta a considerare se un sistema assiomatico sia coerente o no rientra oggi nella matematica …[1]

NOTE

[1] Per maggiori dettagli circa la concezione kantiana della matematica, mi limito a segnalare [1], [2] e [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] Coffa, A., *La tradizione semantica da Kant a Carnap*, Il Mulino, Bologna 1991.

[2] Friedman, M., *Kant and the exact sciences,* Harvard University Press, Cambridge (MA) 1992.

[3] Peruzzi, A., *Dialoghi della ragione impura,* 3 voll., Aracne, Roma 2009-2010.