L'AVVENTUROSA DEFINIZIONE DEL METRO*

GIUSEPPE PIRILLO

Consiglio Nazionale delle Ricerche, Unità di Firenze

Dipartimento di Matematica Ulisse Dini, Università di Firenze

Universitè de Marne-la-Vallée

Lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili.

Pitagora

Le conquiste militari vanno e vengono, ma il metro durerà per sempre.

Napoleone

Non vi è sale al mondo che tanto sia attico quanto il sale dei pratesi, non v'è nulla di più euclideo di quel loro misurare il mondo a braccia come la stoffa...

Curzio Malaparte

1. Introduzione

Abbiamo voluto cominciare con tre citazioni, una calabrese, una francese e una pratese. La prima contiene l'enunciato di due fondamentali risultati di matematica, la seconda è un'importante affermazione politica mentre la terza appartiene alla letteratura. Il richiamo esplicito di affermazioni sulla *misura*, così diverse fra loro, potrebbe aiutare, soprattutto gli studenti, a evitare pericolose confusioni.

L'avventura di Delambre e Méchain è un monumento alla precisione: i due astronomi francesi, tra il 1792 ed il 1799, usando in modo raffinatissimo la trigonometria, hanno misurato un arco di meridiano passante per Parigi con una precisione che sorprende ancora oggi. Pierre-François-André Méchain ha scoperto diverse comete e ha calcolato le loro orbite. Jean-Baptiste-Joseph Delambre è ricordato anche per alcune formule di trigonometria e per [1], *Base du système métrique*. Delambre ha scritto una storia dell'astronomia; un cratere sulla luna e un asteroide portano il suo nome.

2. Spazzavento, Retaia e Poggio Castiglioni

Dopo che, nella primavera del 2009, ci era stata affidata la conferenza sull'avventura di Delambre e Méchain, abbiamo ritenuto di anticiparne il contenuto ad una nipote che, nel Liceo Europeo del Cicognini di Prato, stava studiando trigonometria. Ci è parso opportuno cominciare con un esercizio da svolgere senza fare calcoli, ma indicando

* Lezione tenuta a Prato, il 27 ottobre 2009, presso il Liceo Rodari, nell'ambito dell'edizione 2009 di *Pianeta Galileo.*

solo le procedure. In altri termini, un esercizio di *trigonometria teorica*, utile per porre in evidenza il meglio di quel che la trigonometria permette di fare, cioè effettuare *misure a distanza*.

Dal balcone di casa nostra a Prato sono ben visibili il Monte Le Coste (detto anche Spazzavento, sul quale si trova il mausoleo di Curzio Malaparte), la Retaia e il Poggio Castiglioni. Abbiamo convenuto di considerare Spazzavento, Retaia e Poggio Castiglioni come vertici di un triangolo e ci siamo chiesti come 'calcolare' le distanze tra questi vertici e anche come calcolare le ampiezze degli angoli del triangolo che essi formano.

Per qualche minuto abbiamo scherzato sostenendo che con mezzi adeguati alcune *misure* sarebbero state piuttosto *semplici*. Se, ad esempio, avessimo avuto a disposizione un elicottero che ci avesse aiutato a tendere una corda tra la Retaia e Poggio Castiglioni e se avessimo avuto anche la collaborazione di un acrobata disposto a fare una passeggiata sulla corda tesa e contemporaneamente a misurarla allora trovare la distanza tra Retaia e Poggio Castiglioni non sarebbe stato affatto un problema!

Poi, per ritornare a parlare seriamente, abbiamo posto una condizione: desideravamo conoscere le misure dei lati e degli angoli, ma non volevamo muoverci dal nostro balcone: non potevamo fare a meno della trigonometria.

Dopo una breve discussione, abbiamo convenuto che era opportuno preliminarmente calcolare le distanze di Spazzavento, Retaia e Poggio Castiglioni dal nostro balcone.

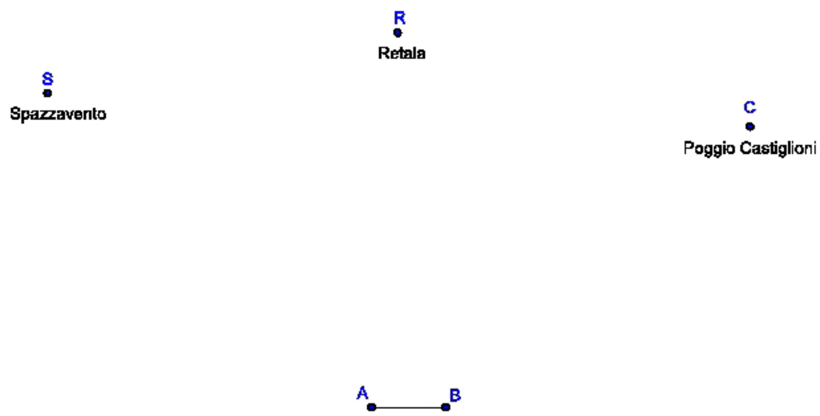

Figura 1.

Con queste premesse (si veda la Figura 1, che non è in scala), abbiamo scelto due punti A e B sul nostro balcone e abbiamo indicate con

- C Poggio Castiglioni
- R Retaia
- S Spazzavento

Abbiamo per primo considerato il triangolo ABC. Potevamo facilmente misurare la distanza tra A e B e potevamo misurare sia l'ampiezza dell'angolo avente vertice in A e lati passanti per B e C (si tratta dell'angolo α della Figura 2) sia l'ampiezza dell'angolo avente vertice in B e lati passanti per A e C (si tratta dell'angolo β della Figura 2).

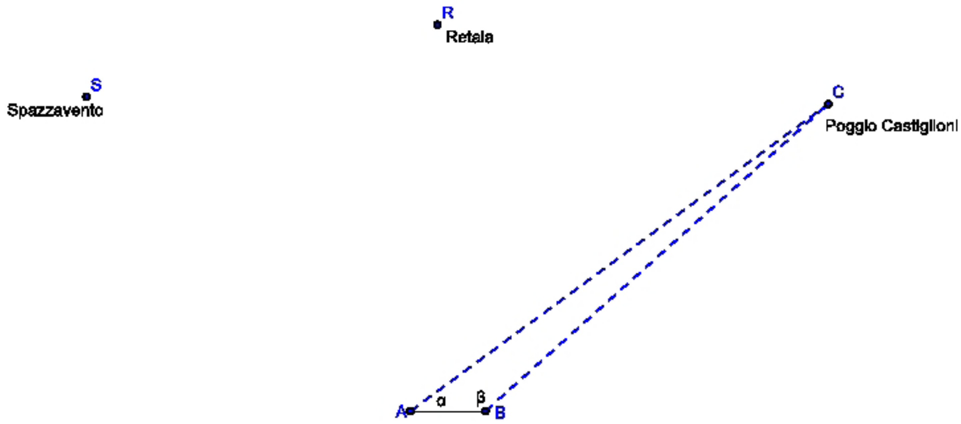

Figura 2.

La trigonometria ci insegna diversi metodi per "risolvere" un triangolo. Uno di questi si può usare quando di un triangolo dato sono note la lunghezza di un lato e le ampiezze dei due angoli ad esso adiacenti. Questo era proprio il caso del triangolo *ABC* del quale ci erano note le ampiezze degli angoli α e β e la lunghezza di *AB*. Potevamo, in particolare, calcolare le lunghezze di *AC* e *BC*. Con la stessa procedura, potevamo risolvere il triangolo *ABR* e in particolare calcolare le lunghezze *AR* e *BR*. Sempre allo stesso modo potevamo risolvere il triangolo *ABS* e in particolare calcolare le lunghezze *AS* e *BS*.

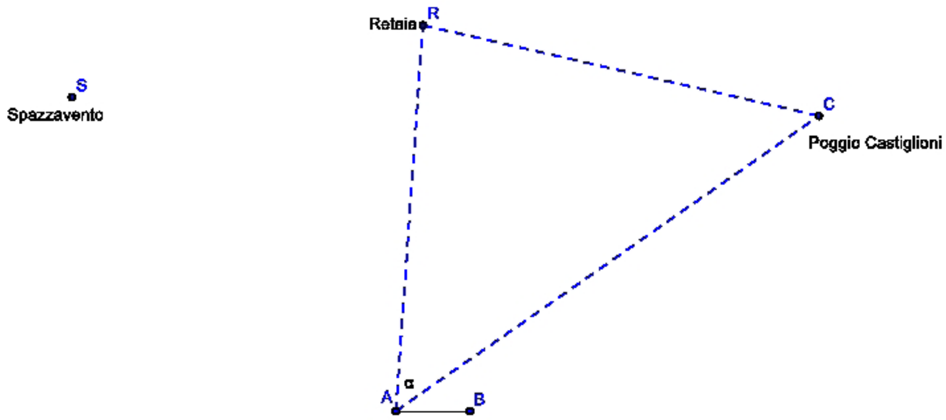

Figura 3.

Potevamo dunque conoscere le misure di sei segmenti: *AC*, *AR*, *AS*, *BC*, *BR*, *BS*. Potevano servirci per risolvere il nostro problema iniziale: calcolare le misure dei lati e degli angoli del triangolo *CRS*?

Certamente! Un altro metodo per risolvere un triangolo si può usare quando di un triangolo dato sono note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo fra essi compreso. Per calcolare la lunghezza di RC avevamo addirittura due scelte: il triangolo RCA e il triangolo RCB. Abbiamo scelto RCA.

Le lunghezze di AR e AC erano già state calcolate e, inoltre, l'angolo con vertice A e lati passanti per C e R (si tratta dell'angolo α della Figura 3) era misurabile senza muoverci dal nostro balcone! Pertanto potevamo risolvere il triangolo RCA e, in particolare, calcolare la lunghezza RC. Con procedura analoga, potevamo risolvere il triangolo ARS e in particolare calcolare la lunghezza RS. Sempre allo stesso modo potevamo risolvere il triangolo ASC e in particolare calcolare la lunghezza SC.

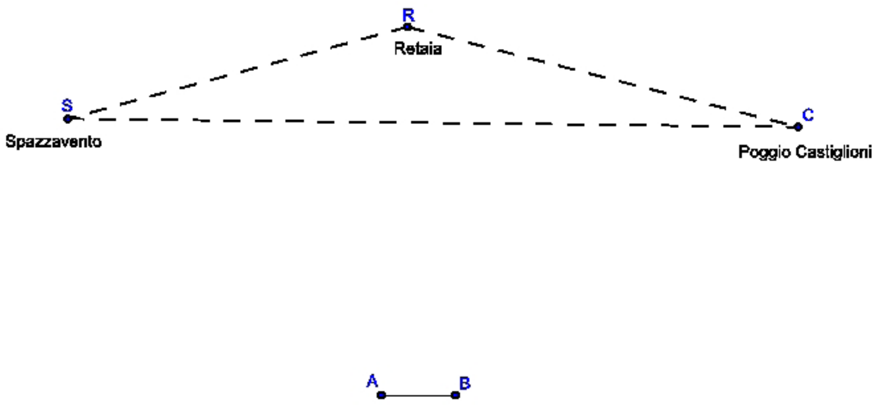

Figura 4.

Un ulteriore metodo per risolvere un triangolo che la trigonometria ci insegna si può usare quando di un triangolo dato sono note le lunghezze dei suoi tre lati. Quest'ultimo metodo si poteva applicare al triangolo *CRS* (si veda la Figura 4), dal momento che conoscevamo i suoi tre lati *RC*, *RS* e *SC*. Potevamo pertanto calcolare anche le ampiezze dei suoi tre angoli. Fine dell'esercizio di trigonometria teorica.

Quelle che abbiamo appena visto sono solo alcune delle misure a distanza che si possono effettuare con l'uso della trigonometria. Altre, per esempio, sono le seguenti:

- misura dell'altezza di una torre con base inaccessibile;
- misura dell'altezza di una montagna rispetto ad un piano orizzontale dato.

3. Il lavoro di Delambre e Méchain

Gli astronomi francesi hanno fatto un lavoro profondamente diverso da quello appena accennato e teorico della sezione precedente. Non potevano certo limitarsi ad affermare che l'arco di meridiano da Dunkerque a Barcellona era misurabile! Dovevano, invece, concretamente misurarlo, ottenere un risultato più preciso di quello di Cassini di mezzo secolo prima. Anzi, dovevano raggiungere la massima precisione allora possibile. E così hanno fatto.

Se per qualche ragione (estranea al lavoro di misurazione del meridiano) avessero dovuto misurare lati e angoli di un triangolo *con struttura orografica simile* a quello Spazzavento-Retaia-Poggio Castiglioni non avrebbero certo proceduto scegliendo i due punti A e B sul balcone di una casa, ma li avrebbero scelti a qualche chilometro di distanza l'uno dall'altro! Si sarebbero, inoltre, assicurati che A e B fossero stati visibili uno dall'altro, avrebbero misurato la loro distanza con la precisione (almeno!) dell'attuale millimetro. Avrebbero, inoltre, scelto A e B in modo tale che Spazzavento, Retaia e Poggio Castiglioni fossero stati visibili sia dall'uno sia dall'altro e avrebbero misurato gli angoli con la precisione del secondo di grado. Misure così precise erano state da poco rese possibili dal *circolo ripetitore* di Borda.

Le operazioni che Delambre e Méchain hanno fatto erano certamente simili a quelle descritte in precedenza ma, ovviamente, comportavano in più le misure e, con le formule opportune, i calcoli effettivi. Naturalmente esistono ottimi manuali di trigonometria sui quali possono essere trovate le formule che noi abbiamo omesso. Segnaliamo, ad esempio, Bergamini-Trifone-Barozzi [2]. Si vedano anche Gasparrelli [4-5].

4. La triangolazione

La triangolazione era la principale tecnica di lavoro di Delambre e Méchain. Venivano individuate una serie di *stazioni*, generalmente sopraelevate. Quasi sempre erano campanili, torri, cime di colline o montange ma all'occorrenza potevano anche essere piattaforme fatte costruire solo per effettuare le misurazioni di quella missione scientifica. Le stazioni erano poi assimilate a vertici di triangoli. I due astronomi hanno, in questo modo, coperto tutto l'arco di meridiano da Dunkerque a Barcellona con una serie ininterrotta di triangoli aventi a due a due un lato in comune.

Dobbiamo precisare che i metodi trigonometrici dei quali abbiamo appena parlato non sarebbero stati da soli sufficienti a portare a termine il lavoro di misurazione del meridiano. C'erano, infatti, anche altre considerazioni da fare. Ci limitiamo ad un brevissimo cenno su alcune di esse:

a) non sempre si potevano posizionare gli strumenti esattamente sul vertice di un triangolo;

b) le stazioni non erano tutte allo stesso livello e pertanto i triangoli risultavano *inclinati*;

c) la terra non è piatta;

d) la misurazione degli angoli risentiva della rifrazione atmosferica.

Ciascuna di queste considerazioni comportava la necessità di altri calcoli delicati e complessi e aumentava il rischio d'*errore* che, in quel periodo particolarmente turbolento, era forse inevitabile. E Méchain si convinse di aver fatto davvero un *grave errore*. Proprio lui che aveva fama di essere abilissimo nelle misure e nei calcoli!

5. Le disavventure

Ci vorrebbe un libro. E ci sono già libri eccellenti: [3] e anche [1], [6] e [7]. Ci limiteremo pertanto a qualche breve cenno.

Méchain e Delambre partirono per la loro missione nel giugno del 1792. Delambre era diretto a Dunquerque e Méchain a Barcellona. Ciascuno dei due portava strumenti di misura, denaro e lettere firmate da Luigi XVI. In un periodo normale, queste ultime sarebbero state di notevole aiuto, ma allora...

Inoltre un semplice controllo dei documenti era rischioso: chiunque avrebbe potuto essere controllato ma ugualmente chiunque avrebbe potuto arrogarsi il diritto di controllare e porre domande. Quando Delambre cercò di spiegare che lui era in missione per l'Accademia ottenne questa secca risposta: «Cademia? Cademia! Non ci sono più cademie, siamo tutti uguali! Venga con noi!».

Per ragioni politiche, Delambre venne addirittura espulso dalla Commissione pesi e misure e gli venne ordinato di consegnare d'urgenza strumenti, calcoli, appunti e memorie ai rimanenti membri della commissione. Un drappo bianco, che avrebbe semplicemente dovuto rendere più visibile da lontano un campanile, venne subito additato dalla folla come *realista* e si comprende bene per quale motivo venne subito affiancato da due strisce di tessuto, una blu e l'altra rossa, in modo da formare una bandiera... *repubblicana*! Un grave incidente (avvenuto non a causa della misurazione del meridiano ma per la curiosità di vedere il funzionamento di una pompa idraulica di nuova invenzione) stava per costare la vita a Méchain.

Una parte del merito del lavoro di Méchain deve essere attribuita alla moglie Thérèse che lo raggiunse quando era in crisi, condivise forse con lui anche una parte del lavoro scientifico e, in ogni caso, riuscì a convincerlo a portarlo a termine. Si veda Alder [1].

7. Le scienze durante la definizione del metro

Non basterebbe un libro. Ci limiteremo a un brevissimo cenno su due personaggi che hanno avuto un ruolo importante per il sistema metrico decimale.

Antoine-Laurent de Lavoisier ha dato contributi importantissimi alla definizione del chilogrammo[1]. L'affermazione: «nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma» è dovuta a lui. È fra coloro che più hanno contribuito alla nascita della chimica moderna. Si è interessato anche di fisiologia. È stato *fermier général* (esattore delle tasse). Durante il Terrore fu condannato e ghigliottinato.

Napoleone Bonaparte ha dato un contributo rilevante e ben noto alla diffusione in Europa e nel mondo del *sistema metrico decimale*. È stato membro e anche Presidente dell'*Académie*. Un teorema di matematica porta il suo nome.

8. Cronologia

In Francia alla fine del Settecento erano in uso ben duecentocinquantamila diverse unità di misura. La Convocazione (1788) e l'Apertura degli Stati Generali (5 maggio 1789), la trasformazione degli Stati Generali in Assemblea nazionale costituente (27 giugno 1789) e la presa della Bastiglia (14 luglio 1789) precedono di poco le prime proteste in Assemblea per il caos delle misure e le prime riflessioni sulla necessità e i modi di renderle uniformi.

Nel tentativo di favorire un accordo fra tutte le nazioni, si scelse la *terra stessa* come *unità di misura*. In particolare, il *quarto di meridiano terrestre* sarebbe dovuto diventare l'unità di misura *reale* e la *diecimilionesima* parte di esso l'unità *abituale*.

Il 10 giugno 1792, anno IV della Libertà, addirittura il re Luigi XVI raccomandò a tutti i corpi amministrativi e alle municipalità non solo di non ostacolare Méchain e Delambre nello svolgimento della loro missione (misura dell'arco di meridiano tra Dunkerque e Barcellona), ma di dar loro tutto il supporto e l'assistenza possibili.

Circa sette anni dopo la partenza di Méchain e Delambre da Parigi, finalmente il 22 giugno 1799 (4 Messidoro, anno VII) in ottemperanza a quanto previsto dalla legge del 7 aprile 1795 (18 Germinale, anno III) vengono depositati negli Archivi della Repubblica, *una ed indivisibile*, i campioni del metro (*métre*) e del chilogrammo (*kilogramme*).

9. Forma della terra

Curiosamente, gli assunti iniziali per l'universalità del metro sono stati messi in discussione proprio da Méchain e Delambre! I due astronomi infatti hanno dimostrato che la terra ha forma irregolare! (Si veda, ad esempio, [1] alle pagine 296 e 297.) Tutto ciò meriterebbe una discussione approfondita. Qui ci limitiamo a dire che l'irregolarità della terra praticamente non ha avuto influenza sulla scelta del metro, adottato sulla base di decisioni politiche.

In tempi remoti verosimilmente gli uomini consideravano la terra di forma piatta. Con le prime misurazioni, gli uomini colti hanno cominciato a immaginare la terra come un corpo celeste avente forma sferica. In seguito misurazioni più precise permisero di trovare una non trascurabile differenza tra il raggio polare ed il raggio equatoriale della terra alla quale venne pertanto attribuita una forma ellissoidale. Questo modello è stato messo in crisi dalle misurazioni di Méchain e Delambre (ai quali pertanto va anche riconosciuto il merito di avere dato un notevole impulso alla ricerca di una forma più realistica della superficie del pianeta sul quale viviamo). La forma oggi attribuita alla terra è quella di un geoide, superficie continua e chiusa con rigonfiamenti ed avvallamenti. Il geoide non è facile da descrivere matematicamente ma è fisicamente individuabile ed è usato in topografia e cartografia come superficie di riferimento per l'altimetria.

NOTE

Il metro oggi è definito come la «distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299 792 458 di secondo».

[1] Il film voluto da Guedj non è mai stato realizzato; tuttavia, leggendo le pagine 84-88 di [6], abbiamo ugualmente 'visto' la scena di Lavoisier impegnato nel suo laboratorio sulla definizione del chilogrammo e abbiamo particolarmente apprezzato le seguenti parole:

> Nel vedere il chimico sempre chino sulla sua vasca ad armeggiare col cilindro, le maniche rimboccate, a Condorcet venne da pensare: aggiungiamo una vela a questo oggetto galleggiante sull'acqua, e avremo un bambinone che gioca con la barchetta nella fontana. Ecco la scienza al lavoro!.

Nel libro di Guedj le considerazioni sulla scienza, tutte molto appropriate e interessanti come quella appena citata, sono numerose e chiare.

RINGRAZIAMENTI

Il geometra Lucio Falcone mi ha fatto conoscere i libri di Luigi Gasparrelli che contengono oltre a chiari suggerimenti di *trigonometria pratica* anche un interessantissimo elenco di *misure agrarie antiche* delle varie regioni italiane e mi ha fatto vedere l'uso pratico dei suoi strumenti di lavoro, fra i quali la *stadia*. In questo modo mi ha permesso di avere un'idea più adeguata dell'enorme mole del lavoro di Méchain e Delambre. Desidero ringraziare con profonda riconoscenza il geometra Falcone per la grande attenzione che egli mi ha dedicato. Ringrazio il Dipartimento di Matematica Ulisse Dini dell'Università di Firenze che mi concede generosa ospitalità.

Bibliografia

[1] Alder, K., *La misura di tutte le cose (L'avventurosa storia dell'invenzione del sistema metrico decimale)*, Rizzoli, Milano 2002.

[2] Bergamini, M., Trifone, A., Barozzi, G., *Goniometria + Trigonometria*, Moduli blu di matematica - Modulo O + Q – Zanichelli, 2005.

[3] Delambre, J. B. J., *Base du système mètrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone exécutée en 1792 et années suivantes par MM. Méchain et Delambre, rédigée par M. Delambre secrétaire perpétuel de l'Institut pour les sciences mathématiques...*, Baudouin, Paris 1806, 1807, 1810.

[4] Gasparrelli, L., *Manuale del geometra*, undecima edizione riveduta, Ulrico Hoepli editore, Milano 1958.

[5] Gasparrelli, L., *Prontuario tecnico di campagna, Vademecum per ingegneri, agronomi, geometri, periti agrari e tecnici in genere con 181 tabelle e 89 tavole*, Ulrico Hoepli Editore, Milano 1975.

[6] Guedj, D., *Il Meridiano, ovvero come i due astronomi Pierre Méchain e Jean-Baptiste Delambre stabilirono la misura di tutte le cose*, Longanesi, Milano 2001.

[7] Guedj, D., *Il Metro del mondo, (In piena Rivoluzione Francese inizia una straordinaria avventura scientifica: la ricerca di un'unità di misura universale)*, Longanesi, Milano 2004.