Un aut-aut insospettato fra il definire e il dimostrare adeguatamente*

Ettore Casari

Scuola Normale Superiore, Pisa

Vorrei innanzi tutto esprimere alla Consigliera regionale Fuscagni e, per suo tramite, all'intero Consiglio Regionale della Toscana così come al Comitato scientifico di Pianeta Galileo, il mio ringraziamento più sincero per l'onore che mi si è voluto fare conferendomi il premio Giulio Preti. A questo proposito vorrei aggiungere che trovo davvero straordinario il fatto che, avviandomi ormai verso la conclusione dei molti decenni trascorsi in compagnia della logica, io mi trovi nuovamente associato a colui che è all'origine di tutta quella frequentazione. E, a riprova del fatto che queste parole non sono dettate dalla circostanza, mi permetto di rileggere quanto ebbi a dire tre anni fa, nella mia lezione di congedo dall'insegnamento presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

> Ero un giovane aspirante grecista che, oltre ai propri corsi, seguiva, sempre più affascinato, quello di Filosofia Morale tenuto dal professore 'incaricato' Giulio Preti. Un giorno, dev'essere stato nella primavera del 1952, nel bel mezzo di una lezione sui *Principia Ethica* di Moore, il 'Giulietto', come lo chiamavamo noi, scrisse sulla lavagna una parentesi aperta, una E maiuscola capovolta, una x, una parentesi chiusa e dei puntini in mezzo ai quali c'era ancora la x e, dicendo che oggigiorno il fatto che esistesse un oggetto con una certa proprietà lo si scriveva così, cambiò completamente il corso della mia vita.
> Richiesto del come ci si potesse informare su quei curiosi modi di scrivere, il Giulietto mi suggerì la lettura delle *Nove lezioni di logica simbolica* di Bocheński da cui appresi i primi rudimenti.

Poco più avanti aggiungevo:

> Preti conosceva l'*Ancient Formal Logic* di Bocheński uscita l'anno prima, nella quale veniva succintamente presentata la nuova ricostruzione della logica megarico–stoica che stava elaborando Benson Mates e intercedette presso il grecista Barigazzi affinché mi consentisse di laurearmi con una tesi sui frammenti di quella logica, permettendomi così di rendere compatibili il mio nascente interesse e la mia posizione di borsista presso il Collegio Borromeo di Pavia.

Venendo ora al tema di questa *lectio*, mi riprometto di illustrare brevemente la mes-

* *Lectio magistralis* tenuta a Firenze il 21 Novembre 2008, nella Sala Gonfalone del Consiglio regionale della Toscana, in occasione della consegna del Premio Giulio Preti 2009.

sa in luce, nel secolo scorso, di una strana e del tutto insospettata limitazione reciproca fra le nostre capacità di *definire* e le nostre capacità di *dimostrare*; scoperta questa che mi sembra di considerevole rilevanza sia per la filosofia sia per la matematica, ma di cui mi pare non si sia ancora preso davvero nota, al di fuori della cerchia dei logici, di quelle persone cioè che si occupano di una disciplina che non pochi filosofi considerano troppo difficile e troppo matematica, mentre non pochi matematici considerano troppo facile e troppo filosofica.

Prendendo le mosse dalle premesse di questa scoperta comincerei con il ricordare che la prima testimonianza della consapevolezza dell'esistenza di una radicale distinzione fra *concetto* e *proposizione* la si incontra nel *Sofista* di Platone. In quel dialogo questa differenza è discussa al livello linguistico e viene presentata come contrapposizione fra quelle parti del linguaggio – i *nomi* e i *verbi* – che *indicano*, *significano*, *nominano* o *denotano* qualcosa (e precisamente i nomi cose o agenti e i verbi azioni), e quelle parti del linguaggio – gli *enunciati* – che, nel caso più semplice, risultano da una opportuna composizione dei primi due e che, a differenza di quelli, non si limitano a nominare o indicare ma, come dice Platone, *circoscrivono*, *determinano* qualcosa e che, a differenza dei primi, possono essere veri o falsi, essere cioè, come anche si dice, delle *verità* o delle *falsità*.

Alla distinzione fra concetti e proposizioni (in particolare alle proposizioni vere) si agganciano due altre fondamentali distinzioni. La prima è quella *logica* fra il *definire* e il *dimostrare* i concetti si definiscono e le verità si dimostrano. La seconda è quella *epistemologica* fra l'*intelligere* e il *conoscere:* i concetti si intelligono, si comprendono, le proposizioni vere si conoscono.

È precisamente sulla base di queste articolazioni concettuali che fra il 450 e il 300 a.C. viene creato in Grecia quel modello ideale di organizzazione razionale di una teoria che, sotto il nome di "metodo assiomatico", rimarrà a lungo paradigmatico nella matematica e non solo in essa.

I tratti essenziali di tale modello sono, com'è noto, i seguenti:

- al problema dell'intelligibilità dei concetti si fa fronte accettandola, sulla base dell'intuizione, per alcuni, possibilmente pochi, fra essi – i *concetti primitivi* – e si affida alla procedura logica della definizione il compito di *trasmettere* tale intelligibilità ai rimanenti, ai *concetti derivati*;
- a quello della conoscenza delle verità si fa invece fronte accettando sulla base della loro evidenza intuitiva alcune, possibilmente poche, fra esse – gli *assiomi* – e si affida alla procedura logica della dimostrazione il compito di *trasmettere* tale evidenza alle rimanenti, ai *teoremi*.

Orbene, nel corso dell'Ottocento questo ideale subisce un profondo ripensamento sia per quanto riguarda la sua valenza epistemologica, sia per quanto riguarda la sua dimensione logica. Sono moltissimi i fatti che concorrono a determinare tale ripensamento ma fra essi due vanno qui almeno accennati.

Il primo è notoriamente costituito dalla scoperta e dal graduale consolidamento delle geometrie non-euclidee. A parte ogni altro aspetto, questo fenomeno mette in discussione proprio la valenza epistemologica di quel modello. Il riconoscimento della possibilità di letture diverse dell'esperienza spaziale, infatti, scuote la fiducia nell'evidenza intuitiva, quella che assicurava sia l'intelligibilità dei concetti primitivi sia la verità degli assiomi e solleva di riflesso anche la domanda di che cosa mai trasmettano davvero le definizioni e le dimostrazioni.

Il secondo va ravvisato nell'emergere di quella che più tardi verrà chiamata l' "algebra astratta". Un tratto logico caratteristico di questa nuova branca della matematica può individuarsi in un ampliamento dell'idea e dell'uso delle definizioni. Queste non vengono più usate soltanto per definire concetti, per così dire di un primo livello, concetti cioè che esprimono o proprietà degli enti di cui si sta parlando o relazioni fra essi o operazioni su di essi – cos'è un quadrato; cos'è un cerchio; cos'è un numero primo; cos'è un numero trascendente; quando sono perpendicolari due rette; cos'è la radice quadrata di un numero; ecc. – ma per definire concetti in qualche modo di un più alto livello, concetti cioè che determinano *sistemi* di enti. Come primo esempio esplicito in tal senso viene solitamente ricordata la definizione di gruppo data da Arthur Cayley nel 1854 ma si tratta di fatto solo di un riferimento di comodo, dato che tale esempio è preceduto e accompagnato da un gran numero di altri, tutti più o meno raccordabili all'idea di fondo del definire un sistema di enti, dello statuire cioè delle condizioni cui non un certo ente, ma un certo sistema di enti, deve sottostare per poter rientrare sotto un certo concetto.

Uno degli aspetti fondamentali e rivoluzionari di questo nuovo modo di procedere è la capacità che così si ottiene di trattare unitariamente sistemi di enti assolutamente diversi dal punto di vista ontologico – per esempio, permutazioni di un insieme, trasformazioni di uno spazio, somme o prodotti di numeri, ecc. – esaltare cioè quell'aspetto che una volta fece dire a Poincaré che «la matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse».

A un certo punto, nell'ultimo quarto dell'Ottocento, e non a caso da parte di uno che proprio alla maturazione dell'algebra in questo nuovo senso aveva dato e stava dando alcuni fondamentali contributi – il tedesco Richard Dedekind – questo nuovo modo di pensare viene indirizzato verso il più antico e concreto sistema di enti matematici: quello dei numeri naturali, nella convinzione che invece di cercare, forse vanamente, una risposta convincente alla plurimillenaria domanda: cos'è *un numero* naturale? Si può sensatamente cercare di dare una risposta precisa alla domanda: cos'è *un sistema di numeri* naturali?

È ben noto che invece a una risposta all'antica domanda stava proprio in quel tempo lavorando anche un altro matematico tedesco, Gottlob Frege. Questi, collocandosi al termine del cosiddetto "processo di aritmetizzazione dell'analisi", un momento essenziale del quale era consistito nella definizione, a partire dal concetto di numero naturale, delle sue varie estensioni (numeri interi, razionali, reali, complessi), compie due passi fondamentali. In primo luogo, esplicita la logica che sovrintendeva a quel processo di aritmetizzazione; in secondo luogo tenta di eliminare l'ultimo residuo non logico di quel processo – i numeri naturali, appunto – fornendo nei termini della logica così individuata una definizione del concetto di numero naturale. Frege tenta cioè, come anche si disse, di "logicizzare l'aritmetica". Com'è pure altrettanto noto, questo tentativo fu ripreso nei primi decenni del secolo scorso da Bertrand Russell che cercò di purificarlo dalle contraddizioni che egli stesso aveva rilevato nel sistema logico fregeano. Questo e quanto ne seguì non è però rilevante per il nostro tema.

Tornando quindi a Dedekind, collocandosi anch'egli al termine del processo di aritmetizzazione dell'analisi, di cui era anzi stato uno dei grandi protagonisti, affronta nella nuova ottica il problema dei numeri naturali e nel 1888 in un celebre opuscolo su *Cosa sono e a cosa servono i numeri* presenta una definizione del concetto di sistema di numeri naturali.

Tre anni dopo il nostro Giuseppe Peano, in un non meno celebre opuscolo in latino su *I principi dell'aritmetica esposti secondo un nuovo metodo*, giunge, attraverso una sistemazione assiomatica divenuta standard, alla determinazione di un concetto di sistema di numeri naturali non molto dissimile da quello di Dedekind, tanto è vero che in una memoria di poco successiva, egli, dopo aver osservato che

> Fra quanto precede, e quanto dice il Dedekind, vi ha una contraddizione apparente, che conviene subito rilevare. Qui non si definisce il numero, ma se ne enunciano le proprietà fondamentali. Invece il Dedekind definisce il numero, e precisamente chiama numero ciò che soddisfa alle condizioni predette», aggiunge: «Evidentemente le due cose coincidono.

Due cose meritano di essere sottolineate.

La prima è che a Dedekind e a Peano era anche comune la convinzione che le loro definizioni *caratterizzassero* il sistema dei numeri naturali, ossia che pur nella loro astrattezza, che comportava inevitabilmente la molteplicità dei sistemi di enti che sottostavano ad esse, le loro definizioni fissassero univocamente la *struttura* del sistema, nel senso che tutti questi sistemi, a prescindere dalla loro natura, fossero *isomorfi*, ossia strutturalmente indiscernibili.

La seconda è che, malgrado la convinzione di Peano, le due proposte non erano affatto la stessa cosa: la *strumentazione concettuale* usata nelle due definizioni era profondamente diversa. In quella di Dedekind si faceva esclusivamente uso di concetti che oggi chiamiamo "*insiemistici*": sistemi di enti, operazioni su questi enti, proprietà di questi enti e di queste operazioni; in quella di Peano erano invece coinvolti, come fu ben presto esplicitato, anche *altri due*, ben diversi, concetti: quello di *linguaggio formale* e quello di *soddisfacimento*, da parte di una struttura insiemistica, di espressioni di un linguaggio di questo tipo. Il concetto di sistema di numeri naturali veniva così a *dipendere* da questi due nuovi concetti e sarebbe quindi potenzialmente mutato al variare di essi.

Ci volle però quasi mezzo secolo perché ci si rendesse conto dell'importanza e delle implicazioni di questa dipendenza e in particolare della dipendenza dalla scelta del linguaggio. Decisiva fu a questo riguardo la distinzione maturata negli anni Venti fra linguaggi cosiddetti 'elementari' o 'del primo ordine' e linguaggi di 'ordine superiore'. Per i non addetti ai lavori, mi permetto di ricordare che 'elementari' sono detti quei linguaggi nei quali si parla di certi oggetti, per esempio degli uomini o dei numeri, di certe loro proprietà, o relazioni fra essi, o operazioni su di essi, facendo anche tranquillamente riferimento alla totalità di questi oggetti, mai però alle totalità delle loro possibili proprietà o delle loro possibili relazioni o delle possibili operazioni su di essi. Il termine "elementare", però, non inganni: la *teoria degli insiemi*, nella quale, com'è noto, è possibile ricostruire la massima parte delle teorie matematiche correnti, è formulata in un linguaggio elementare.

Il primo ad accorgersi delle conseguenze della dipendenza del concetto di sistema di numeri naturali dalla scelta del linguaggio fu il norvegese Thoralf Skolem che attraverso vari passaggi giunse nel 1934 alla conclusione ben illustrata nel titolo della memoria in cui la presentò: *Sulla noncaratterizzabilità della serie numerica mediante un numero finito o numerabile di proposizioni con solo variabili numeriche* (cioè, secondo la nostra terminologia, con proposizioni elementari). Questo risultato non attrasse nell'immediato un grande interesse, che maturò invece soltanto a partire dagli anni Cinquanta anche in conseguenza del fatto segnalato nel 1950 da Leon Henkin che quest'impossibilità di definire elementarmente il sistema dei numeri naturali (e non solo quello) è già una conseguenza quasi immediata del cosiddetto "Teorema di compattezza della logica elementare", dimostrato alla fine degli anni Venti dall'austriaco Kurt Gödel e generalizzato qualche anno dopo dal russo Anatolji Malcev.

Dunque il primo fatto accertato è questo: non esiste la possibilità di *definire elementarmente* il sistema dei numeri naturali, ossia, non esiste alcun insieme di proposizioni elementari che siano soddisfatte soltanto da sistemi di enti fra loro strutturalmente indiscernibili e corrispondenti a quelli che siamo da tempo abituati a considerare i numeri naturali: 1, 2, 3, 4, ecc.; ogni insieme di proposizioni elementari, cioè che sia soddisfatto dal sistema dei familiari 1, 2, 3, 4, ecc. è soddisfatto anche da sistemi di enti strutturalmente assai diversi da questo.

Detto un po' coloritamente: quando parliamo dei numeri naturali al livello elementare non sappiamo bene di che cosa stiamo parlando.

Ma, si dirà, rielaborando il lavoro di Dedekind si è pur dimostrata la *categoricità* degli assiomi di Peano, il fatto cioè che essi hanno appunto, a meno di isomorfismi, un solo modello, tanto è vero che una corretta dimostrazione di questo fatto si trova anche spesso esposta nei buoni manuali di matematica. Il fatto importante è però che questa dimostrazione fa riferimento a un linguaggio non più elementare, ma del 'secondo ordine'. Apparentemente, quindi, niente di drammatico: per essere sicuro che, volendo parlare del sistema dei numeri naturali in modo da sapere di che cosa sto parlando, non posso limitarmi a parlarne al livello elementare, ma devo spostarmi su un livello superiore; anzi, come si è anche visto successivamente, non è nemmeno necessario spostarsi proprio sul secondo ordine, basta qualche opportuno potenziamento intermedio del livello elementare.

E quindi dove sta il problema? Lo si scopre quando alle domande circa la *definibilità* aggiungiamo quelle circa la *dimostrabilità*, perché qui i rapporti di forza si invertono: all'insufficienza espressiva del livello elementare fa da contrappeso la sua potenza dimostrativa, mentre alla potenza espressiva dei livelli sufficienti per una caratterizzazione soddisfacente dei numeri naturali si contrappone la loro insufficienza dimostrativa.

Questi due dati di fatto circa la dimostrabilità trovano le loro radici in due fondamentali risultati ottenuti alla fine degli anni Venti da Gödel.

Dal primo di questi risultati, noto come "Teorema di completezza della logica elementare", ricaviamo in particolare che, data una qualsiasi sistemazione assiomatica elementare della teoria dei numeri naturali, sappiamo con certezza che potremo dimostrare ogni proposizione elementare che sia vera in tutti i sistemi di enti che soddisfano i nostri assiomi; d'altra parte, come si è detto, sappiamo con non minore certezza che a questo livello non stiamo veramente parlando soltanto dei sistemi di enti che si comportano come quei numeri che ci si sono da sempre familiari, ma anche di altri, addirittura di un'infinità più che numerabile di altri sistemi di cose, tutti strutturalmente diversi fra loro.

Dal secondo di quei risultati, il celeberrimo "Teorema di Gödel" per antonomasia, ricaviamo invece che uscendo dal livello elementare disponiamo sì, come si è detto, di sistemi assiomatici – per esempio appunto quello di Peano – che fissano univocamente la struttura del sistema dei numeri naturali così come suggeritaci dalla nostra intuizione, ma che tuttavia ci sono sempre proposizioni che in tale struttura sono vere ma che non si possono dimostrare.

Riassumendo (un po' coloritamente): se ho delle fondate ragioni per ritenere di essere riuscito a fissare in maniera univoca la struttura del sistema dei numeri naturali, se cioè so che sto veramente parlando, a meno di isomorfismi, dei miei cari numeri naturali, so con assoluta certezza che ci saranno sempre delle verità che li concernono ma che io non potrò mai dimostrare; se invece ho la certezza di poter dimostrare tutte le verità che vigono per gli enti di cui sto parlando, so con altrettanta certezza che sto sempre anche parlando di cose che sono sì in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, ma hanno una struttura assai diversa.

Questa importante e del tutto inaspettata acquisizione intorno alle nostre capacità di dominare la più semplice delle infinità con cui da sempre si sono cimentate la riflessione filosofica e quella matematica non sembra essere ancora diventata patrimonio comune di epistemologi e matematici. Ancor oggi, per esempio, non è difficile incontrare in testi matematici l'idea che la sistemazione assiomatica di Peano costituisca la risposta conclusiva alla plurimillenaria questione: *cosa sono i numeri naturali*? Come ho cercato di dire, questo poteva considerarsi vero nei primi decenni del secolo scorso; oggi non lo si può proprio più fare.

Naturalmente però questa 'demolizione di una credenza', questa conclusione per tanti versi negativa si è trasformata, com'è del resto sovente accaduto nella storia del pensiero e quasi regolarmente in quella del pensiero matematico – a partire dalla scoperta pitagorica dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato – in una apertura di nuovi orizzonti e terreni di indagine.

Riformuliamo infatti la cosa in questo modo: già con Dedekind e Peano avevamo imparato che l'idea di 'sistema dei numeri naturali', sottoposta ad analisi, risultava essere non un concetto 'concreto', ma solo uno 'semiconcreto', identificante cioè i propri elementi a meno di isomorfismi; ora essa ci è diventato un concetto 'astratto', non dissimile, in linea di principio, da concetti come quelli di gruppo o di anello.

Sorge allora in modo naturale la domanda: va bene, ma come sono fatti questi altri sistemi di enti di cui parliamo, per così dire, inconsapevolmente quando ragioniamo elementarmente sui numeri naturali?

Ebbene, lo studio di questi sistemi, di questi cosiddetti 'modelli nonstandard dell'aritmetica' è divenuta una branca significativa della ricerca logico–matematica contemporanea. Tanto per citare un esempio recente: nel 2006 è uscito per i tipi della Oxford un volume di ben 328 pagine dedicato alla *Struttura dei modelli nonstandard dell'aritmetica*.

Vi ringrazio dell'attenzione.