Probabilità e illusioni

Ennio Peres

Giornalista, esperto di giochi della mente

1. Concetti di base

In matematica, viene definito *Calcolo delle probabilità* il complesso di regole e di procedimenti con i quali si riesce ad avere informazioni utili, in merito al verificarsi di determinati eventi, il cui esito è legato al caso.

L'evolversi di questa disciplina ha consentito, negli ultimi tre secoli, non solo di affrontare con maggiore consapevolezza molti problemi pratici, ma soprattutto di ampliare in maniera determinante i confini di diversi campi del sapere umano, dalla fisica alla biologia, dalla chimica alla psicologia, dalla geologia alla sociologia.

I primi concetti del *Calcolo delle probabilità* sono stati elaborati, per opera di alcuni sommi scienziati (come Gerolamo Cardano, Galileo Galilei e Blaise Pascal), analizzando delle questioni relative al lancio dei dadi. In generale, infatti, le regole e gli strumenti dei giochi aleatori, essendo sintetici e lineari, si prestano a essere facilmente interpretati, mediante un modello matematico schematico e funzionale. Per tale motivo, nell'esposizione degli elementi principali di tale teoria, si ricorre spesso ad esempi basati sull'utilizzo di materiale da gioco (carte, dadi, palline colorate, ecc.).

Per acquistare confidenza con questa importante branca della matematica, è necessario chiarire i fondamentali concetti di *probabilità* e di *frequenza*, su cui si basa.

Probabilità di un evento: è un valore teorico, potenzialmente ricavabile con diversi procedimenti; corrisponde a una stima, formulata a priori, della possibilità che un determinato evento ha di verificarsi.

Esempio. Prima di lanciare una moneta in aria, possiamo ragionevolmente stimare che la probabilità che cada, ad esempio, dal lato «testa» è uguale a: 1/2 = 0,5.

Indipendentemente dal metodo usato per ricavarlo, il valore di una probabilità viene espresso mediante un numero decimale, compreso tra 0 e 1. Ovviamente, più è grande questo valore, maggiore è il grado di fiducia che si ripone nel verificarsi dell'evento in questione.

Frequenza di un evento*:* è un valore pratico, che si ricava al termine di un'apposita sperimentazione; corrisponde al valore che si ottiene effettuando una divisione tra la quantità di volte in cui un determinato evento si è verificato e la quantità totale di prove effettuate.

Esempio. Se dopo aver lanciato una moneta 100 volte, si rileva che la «testa» è uscita 50 volte, si può affermare che la frequenza di uscita di «testa» è uguale a: 50/100 = 1/2 = 0,5.

Siccome il numero di successi ottenuti non può essere superiore a quello delle prove effettuate, anche il valore di una frequenza corrisponde a un numero decimale compreso tra 0 e 1.

Mentre, in relazione a un determinato evento, il valore della probabilità corrisponde a un numero fisso (ricavato mediante un calcolo matematico), quello della frequenza cambia al variare della quantità di prove effettuate e di quella dei successi ottenuti. In definitiva, quando si calcola la probabilità di un evento, si cerca di valutare a priori la frequenza che si potrebbe ottenere, effettuando un considerevole numero di prove.

Nota. In molte applicazioni pratiche, si usa esprimere i valori di probabilità e frequenza, non mediante numeri decimali, ma sotto forma di frazioni; per cui, ad esempio, si scrive 1/10, invece di 0,1. Inoltre, per poter usufruire di un comodo parametro di riferimento, spesso si ricorre a frazioni con denominatore 100; di conseguenza, nel caso precedente, non si scriverebbe 1/10 (o 0,1) ma 10/100 o, più sinteticamente: 10% (10 per cento).

2. Legge dei grandi numeri

L'esistenza di uno stretto legame tra i concetti di probabilità e frequenza è sancita dalla cosiddetta *Legge dei grandi numeri*, enunciata per la prima volta verso i primi del Settecento, da Jakob Bernoulli.

Questo fondamentale teorema matematico afferma sostanzialmente che, tanto più è alta la quantità di prove effettuate (al limite, infinita), tanto più la frequenza di un determinato evento tende alla relativa probabilità.

Un tale presupposto è molto importante, perché consente di assumere direttamente, come valore della probabilità di un evento, quello della frequenza ottenuta dopo aver eseguito un'adeguata quantità di prove in merito.

Se dopo aver lanciato una moneta 100 volte, si rileva che la «testa» è uscita 50 volte, si può affermare che la probabilità di uscita di «testa» è uguale alla frequenza riscontata, ovvero a 50/100 = 1/2 = 0,5.

Ovviamente, il ricorso a un metodo del genere risulta particolarmente utile in tutte le situazioni in cui non è facile analizzare a priori le caratteristiche dell'evento che si intende studiare.

Il teorema di Bernoulli, ha favorito la nascita e lo sviluppo della *statistica*, ovvero di quella disciplina che descrive le caratteristiche di un determinato fenomeno, analizzando un insieme di dati raccolti su di esso.

3. Probabilità semplice

Secondo la definizione più antica (detta *classica*), la probabilità di un determinato evento è uguale alla quantità dei casi favorevoli a quell'evento, diviso la quantità di tutti i casi possibili (a condizione che questi siano tutti ugualmente possibili).

Esempio. Se si vuole determinare la probabilità di estrarre un K da un mazzo di 52 carte (effettuando un solo tentativo), bisogna considerare che:

- i casi favorevoli sono: 4 (i K contenuti nel mazzo),
- i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 52 (le carte dell'intero mazzo).

Il valore della probabilità richiesta, quindi, è uguale a 4/52 = 1/13 = 0,0769.

Un evento viene detto *certo*, quando tutti i casi possibili sono ad esso favorevoli.

La probabilità relativa a un evento certo è uguale a 1; infatti, se i casi possibili sono N, anche quelli favorevoli devono essere N; quindi, si ha: N/N = 1.

Esempio. Se vogliamo calcolare la probabilità di estrarre una carta di cuori da un mazzetto composto da 13 carte di cuori, dobbiamo considerare che:

- i casi favorevoli sono 13 (le carte di cuori contenute nel mazzetto);
- casi possibili sono 13 (le carte dell'intero mazzetto).

Il valore della probabilità richiesta, quindi, è uguale a: 13/13 = 1 (di conseguenza, un evento del genere è certo).

Un evento viene detto *impossibile*, quando nessuno dei casi possibili è ad esso favorevole. La probabilità che si verifichi un evento impossibile è uguale a 0; infatti, se i casi possibili sono N, quelli favorevoli sono 0; quindi, si ha 0/N = 0.

Esempio. Se vogliamo calcolare la probabilità di estrarre una carta di picche da un mazzetto composto da 13 carte di cuori, dobbiamo considerare che:

- i casi favorevoli sono 0 (le carte di picche contenute nel mazzetto);
- i casi possibili sono 13 (le carte dell'intero mazzetto).

Il valore della probabilità richiesta, quindi, è uguale a: 0/13 = 0 (di conseguenza, un evento del genere è impossibile).

Siccome un evento non può mai essere più certo del certo, né più impossibile dell'impossibile, se ne deduce che il valore della probabilità, come abbiamo già visto, è rappresentato da un numero compreso tra 0 e 1.

Un evento viene detto *improbabile*, quando il valore della sua probabilità è vicino a 0, mentre viene detto *probabile*, quando il valore della sua probabilità è vicino a 1.

Esempio. La probabilità di indovinare l'uscita dell'unica sestina vincente al *Superenalotto*, fra tutte le 622.614.630 sestine possibili, è uguale a 1/622.614.630 = 0,0000000016. Siccome questo valore è molto vicino a 0, si può affermare che il relativo evento è assai improbabile.

Viceversa, la probabilità di non indovinare l'uscita dell'unica sestina vincente al *Superenalotto* è uguale a 622.614.629/622.614.630 = 0,9999999984. Siccome questo valore è molto vicino a 1, si può affermare che il relativo evento è assai probabile.

Bisogna stare molto attenti a non confondere il concetto di *improbabile* con quello di *impossibile*, né il concetto di *probabile* con quello di *certo*, come comunemente si tende a fare.

Infatti:

- un evento *impossibile* non si verifica mai, mentre un evento anche molto *improbabile*, qualche volta, pur se di rado, può verificarsi (ogni tanto, può capitare che qualcuno riesca a pronosticare l'uscita dell'unica sestina vincente al *Superenalotto* ...);
- un evento *certo* si verifica sempre, mentre un evento anche molto *probabile* qualche volta, pur se di rado, può non verificarsi (ogni tanto, può capitare che qualcuno non sbagli nel pronosticare l'uscita dell'unica sestina vincente al *Superenalotto* ...).

4. Probabilità totale

Due o più eventi vengono detti *incompatibili* quando l'avverarsi di uno qualsiasi di essi esclude l'avverarsi dell'altro (o degli altri).

Esempio. Al gioco del *Lotto*, l'estrazione di un numero pari è incompatibile con quella di un numero dispari, ma non lo è con quella di un numero superiore a 45 (in quanto, ci sono diversi numeri pari, maggiori di 45).

Se un evento è costituito dall'unione di vari eventi incompatibili, la sua probabilità (detta *totale)* è uguale alla somma delle probabilità di tutti gli eventi di cui è composto.

Esempio. Se si vuole calcolare la probabilità che, estraendo una sola carta da un mazzo che ne contiene 52, questa sia una figura o un asso, si può ragionare nel seguente modo:

- i due eventi in questione sono incompatibili tra loro; infatti, l'estrazione di una determinata carta esclude che ne venga estratta una delle altre;
- un mazzo di 52 carte contiene 12 diverse figure; quindi la probabilità che venga estratta una di queste è uguale a

$$P(\text{figure}) = 12/52 = 3/13;$$

- un mazzo di 52 carte contiene 4 diversi assi; quindi, la probabilità che venga estratto uno di questi è uguale a

$$P(\text{asso}) = 4/52 = 1/13.$$

Di conseguenza, la probabilità di estrarre una figura o un asso, è uguale a

$$P(\text{figura o asso}) = 3/13+1/13 = 4/13 = 0{,}3077$$

Nota. Nel semplice caso preso in esame, il risultato ottenuto si può giustificare considerando che in un mazzo di 52 carte ci sono 12 figure e 4 assi; quindi, i casi favorevoli all'evento in questione sono: 4+12 = 16. Di conseguenza, la probabilità di estrarre una figura o un asso, può essere anche data direttamente da

$$P(\text{figura o asso}) = 16/52 = 4/13 = 0{,}3077.$$

5. Probabilità composta

Due (o più) eventi non incompatibili vengono detti *indipendenti*, quando l'avverarsi di uno qualsiasi di essi non influenza l'avverarsi dell'altro (o degli altri).

Esempio. Se si effettua una serie di estrazioni di palline da un sacchetto, riponendoci ogni volta le palline estratte, l'esito di ciascuna estrazione non influenza in alcun modo quello delle altre (se invece, le palline non vengono rimesse ogni volta nel sacchetto, ogni estrazione influenza le successive, perché modifica la quantità di palline in esso presenti).

Se un determinato evento risulta dalla concomitanza (simultanea o successiva) di più eventi indipendenti, la sua probabilità (detta *composta)* è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi indipendenti.

Esempio. se si vuole determinare la probabilità di estrarre due K di cuori, effettuando due distinte estrazioni da due mazzi di 52 carte, si può ragionare nel seguente modo:

- i due eventi in questione sono indipendenti; infatti, l'estrazione di una carta da uno qualsiasi dei due mazzi non può influire in alcun modo sull'esito delle altre estrazioni;
- un mazzo da cinquantadue carte contiene un solo K di cuori; quindi, la probabilità di estrarre questa carta da uno qualsiasi dei due mazzi è data da

$$P(\text{K di cuori}) = 1/52.$$

- Perciò, la probabilità dell'evento corrispondente alla concomitanza dei due eventi dati, è uguale al prodotto delle probabilità, cioè,

$$P(\text{due K di cuori}) = (1/52)(1/52) = 1/2704 = 0{,}0004.$$

Nota. Nel semplice caso preso in esame, il risultato ottenuto si può giustificare, considerando che l'insieme di tutte le diverse coppie di carte, componibili con due mazzi da cinquantadue, è uguale a: $52\times52 = 2.704$; mentre, tra queste, una sola corrisponde a K di cuori.

Di conseguenza, la probabilità di estrarre due K di cuori da due mazzi di cinquantadue carte, può essere anche data direttamente da

$$P(\text{due K di cuori}) = 1/2.704 = 0{,}0004.$$

6. Probabilità opposta

Se la probabilità che un evento si verifichi è uguale a P, la probabilità P' che l'evento non si verifichi (detta *probabilità opposta*), è data da

$$P' = 1-P$$

Esempio. Siccome la probabilità di estrarre un K, da un mazzo di 52 carte, è uguale a:

$$P(K) = 4/52 = 1/13,$$

la probabilità di *non* estrarre un K è uguale a:

$$P(\text{non } K) = 1-1/13 = (13-1)/13 = 12/13.$$

Nota. Nel semplice caso preso in esame, il risultato ottenuto si può giustificare, considerando che in un mazzo di 52 carte ce ne sono 48 diverse da un K e che, quindi, la probabilità di non estrarre un K può essere anche data direttamente da:

$$P\ (\text{non } K) = 48/52 = 12/13.$$

7. Definizione di probabilità

È singolare constatare che, nel corso degli oltre tre secoli della propria storia, la teoria del *Calcolo delle probabilità* è riuscita a svilupparsi in modo considerevole, nonostante non fosse stata mai trovata una definizione convincente e non ambigua del concetto stesso di probabilità.

Secondo la definizione più antica (detta *classica*), infatti, la probabilità di un evento corrisponde al rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero di tutti i casi possibili, sottintendendo che questi debbano essere tutti *ugualmente probabili*.

Come si può notare, una tale enunciazione ha bisogno di appoggiarsi a un concetto di probabilità preesistente. Matematicamente, però, non è accettabile che una definizione si basi sullo stesso concetto che dovrebbe definire ...

In base a una definizione più pragmatica (detta *frequentistica*), la probabilità di un evento corrisponde alla frequenza dei successi che si ottengono in una successione di prove relative a quell'evento, tutte effettuate nelle stesse condizioni. Questa definizione, molto utile in campo statistico, presenta il difetto di non essere operativa nell'analisi di eventi non ancora verificatisi.

All'inizio degli anni Settanta, il matematico italiano Bruno De Finetti ha contribuito a dare al concetto di probabilità un significato più sostanziale e concreto.

Secondo la definizione da lui proposta (detta *soggettiva*) la probabilità di un evento corrisponde al grado di fiducia (variabile da persona da persona) che si pone nel verificarsi dell'evento stesso.

In base a questa rivoluzionaria impostazione, la probabilità non deve essere più vista come una caratteristica insita nei fattori che regolano il verificarsi di un determinato evento, ma solo una personale valutazione delle loro implicazioni.

Questa impostazione, tra l'altro, consente di utilizzare i risultati legati alle altre due definizioni (*classica* e *frequentistica*), adottandoli in base a una scelta soggettiva (senza entrare in contraddizione, quindi, con la definizione assunta).

È bene precisare, comunque, che l'attribuzione soggettiva della probabilità non deve essere confusa con un'assoluta arbitrarietà di scelta; perché possa essere funzionale, infatti, la valutazione personale deve essere espressa nel modo più equo e coerente possibile.

8. Inganni probabilistici

Il *Calcolo delle probabilità* è la branca della matematica in cui è più facile essere tratti in inganno. Utilizzando i suoi strumenti, può capitare non solo di ottenere una soluzione falsa e ritenerla vera, ma anche di ottenerne una vera e considerarla falsa. Spesso, infatti, i risultati cui porta appaiono paradossali, anche dopo aver esaminato con attenzione una loro rigorosa dimostrazione.

Questa insidiosa caratteristica del *Calcolo delle probabilità* è dovuta alla natura piuttosto capziosa delle problematiche di cui si occupa, ma è aggravata anche dal fatto che, spesso, la rilevazione di un eventuale errore d'impostazione, può scaturire solo da un controllo sperimentale dei risultati teorici ipotizzati. Una verifica del genere, però, non sempre è attuabile e, in ogni caso, per poter essere considerata attendibile, dovrebbe basarsi su un numero assai elevato di prove.

L'inganno in cui si cade più frequentemente riguarda il conteggio dei casi favorevoli a un determinato evento e di tutti quelli possibili. Un'operazione del genere non può essere sempre compiuta in maniera diretta (come è stato possibile fare, nei semplici esempi finora proposti); quando la quantità degli elementi a disposizione diventa troppo elevata, è necessario ricorrere all'uso di apposite formule.

9. Il paradosso dei compleanni

Una divertente conferma di come, a volte, non sia affatto facile valutare la probabilità relativa a un dato evento, riguarda la possibilità che in un determinato gruppo di persone, due di queste siano nate nello stesso giorno e nello stesso mese (anche se in anni diversi). Si stenta a credere, che, ad esempio, in un gruppo di appena 50 persone, una probabilità del genere non è del 15%–20%, come si potrebbe intuitivamente pensare, ma arriva quasi al 100%.

Quindi, se vi trovate a una riunione con 50 o più persone, potete scommettere (con la quasi certezza di vincere) che almeno due dei presenti festeggiano il compleanno nello stesso giorno (pur potendo avere età diverse).

Si può giustificare un tale paradossale risultato, elaborando un ragionamento analogo al seguente.

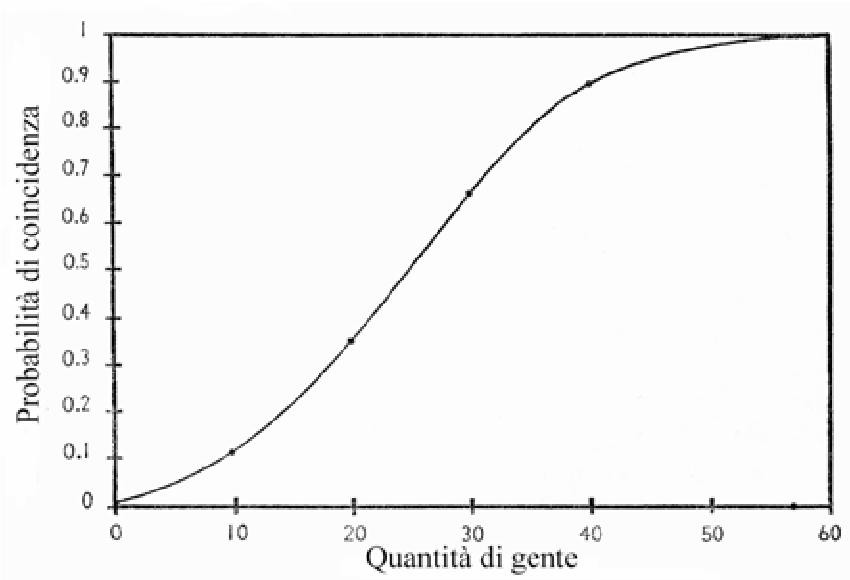
Se si prende in considerazione la probabilità Q che due persone non compiano il compleanno nello stesso giorno (escludendo, per semplicità, gli anni bisestili), si può facilmente ricavare che:

- in un gruppo di 2 persone, $Q = 365 \times 364/365^2$;
- in un gruppo di 3 persone, $Q = 365 \times 364 \times 363/365^3$;
- in un gruppo di 4 persone, $Q = 365 \times 364 \times 363 \times 362/365^4$;
- ...
- in un gruppo di N persone, $Q = 365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365-N+1)/365^N$.

Si può verificare, di conseguenza, che il valore di Q, al crescere di N tende rapidamente a 0; di conseguenza, il valore della probabilità opposta (ovvero che almeno due persone compiano gli anni nello stesso giorno), tende velocemente a 1, essendo dato da

$$P = 1 - Q.$$

Il quadro completo della situazione è riassunto dal seguente diagramma, dove sull'asse delle ordinate sono riportati i valori di P (probabilità di coincidenza) e su l'asse delle ascisse i valori di N (numero di persone).



Per cercare di comprendere meglio l'assunto di questo paradosso, conviene calarsi in una situazione più familiare. Si pensi, ad esempio, a una raccolta di figurine composta da 365 pezzi; qual è la probabilità di non trovare neanche un doppione, tra le prime 50 figurine acquistate? Chi non ha perso memoria dei propri passatempi fanciulleschi, dovrebbe convenire che un'eventualità del genere è estremamente improbabile …

10. Problemi capziosi

L'inganno in cui si cade più frequentemente, quando si calcola la probabilità relativa al verificarsi di un determinato evento, riguarda il conteggio dei casi favorevoli all'evento e di tutti quelli possibili. Questo genere di errore ha un'origine essenzialmente logica e, quindi, può scaturire anche quando i casi da prendere in considerazione sono molto pochi.

Qui di seguito sono riportati alcuni classici problemi probabilistici, apparentemente semplici, ma estremamente capziosi (nei primi due esempi, per semplicità viene supposto che la probabilità di avere un figlio maschio sia uguale a quella di avere una figlia femmina).

a. In una famiglia ci sono due soli figli, dei quali almeno uno è maschio; qual è la probabilità che l'altro figlio sia femmina?

Soluzione

Intuitivamente, si è portati a ritenere che tale probabilità sia uguale a 1/2; una risposta del genere, però, è errata. Infatti, ci sono quattro modi possibili di avere due figli, che possono essere così indicati (M = maschio; F = femmina):

MM - MF - FM - FF

Escludendo il caso FF, i modi di avere due figli, almeno uno dei quali maschio, sono tre:

MM - MF - FM.

Come si può facilmente notare, in due casi, l'altro figlio è femmina (MF – FM), mentre in un solo caso è maschio (MM). Di conseguenza, la probabilità che l'altro figlio sia femmina è uguale a 2/3.

Nota. La risposta 1/2 sarebbe stata corretta se l'enunciato del problema fosse stato il seguente: «In una famiglia ci sono due soli figli, *il primo dei quali è maschio*; qual è la probabilità che l'altro figlio sia femmina?».

b. In una famiglia ci sono esattamente quattro figli; qual è la probabilità che siano due maschi e due femmine?

Soluzione

Ci sono sedici modi possibili di avere quattro figli e possono essere così indicati:

MMMM - MMMF - MMFM - MFMM - FMMM - MMFF - MFMF - FMMF

FFFF - FFFM - FFMF - FMFF - MFFF - FFMM - FMFM - MFFM.

Solo sei di questi corrispondono a due maschi e due femmine (MMFF – MFMF – FMMF – MFFM – FMFM – FFMM); di conseguenza, la probabilità che, su quattro figli, due siano maschi e due femmine, è uguale a 6/16 = 3/8 (e non a 1/2, come si è indotti, erroneamente, a supporre...).

c. Due amici, Andrea e Biagio, giocano a lanciare una moneta. Andrea punta sull'uscita consecutiva di due teste (TT), mentre Biagio punta sull'uscita di una croce seguita da una testa (CT). La moneta verrà lanciata tante volte, finché due risultati consecutivi non coincideranno con una delle due combinazioni scelte. Ad esempio, se l'esito dei primi due lanci dovesse essere: TT, vincerebbe Andrea; mentre, se l'esito dei primi tre lanci fosse: CCT, avrebbe vinto Biagio. Uno dei due contendenti ha maggiori probabilità di vittoria rispetto all'altro? O queste sono 50% per entrambi?

Soluzione

Andrea vince solo se, nei primi due lanci, esce TT. Biagio, invece, vince non solo se esce subito CT, ma anche: TC o CC. In questi due casi, infatti, Biagio vincerà non appena sarà uscita una T (Andrea, quindi, non potrà più completare una TT). Quindi, Andrea ha solo 1/4 di probabilità di vincere.

Nota. In teoria, si potrebbe verificare una situazione di stallo, se dovessero uscire sempre e solo delle C; ma la probabilità di un evento del genere tende a 0, con l'aumentare del numero dei lanci.

d. Diversi anni fa, prima che i controlli agli aeroporti diventassero più rigidi, il signor Rossi aveva letto che la probabilità di viaggiare in un aereo, sul quale era salito anche un dirottatore armato di bomba, poteva valutarsi intorno a 1/10.000. Alla luce di quel dato, aveva calcolato che la probabilità di trovare su uno stesso aereo due passeggeri armati di bomba era uguale a circa: (1/10.000)(1/10.000) = 1/100.000.000 (una su cento milioni...). Di conseguenza, il signor Rossi aveva adottato l'accortezza di viaggiare in aereo, nascondendo sempre una bomba nel proprio bagaglio. In questo modo, era convinto di rendere praticamente nulla la possibilità di trovarne un'altra a bordo.

Era corretto il suo ragionamento?

Soluzione

In effetti, se si pone uguale a 1/10.000 la probabilità che a bordo di un aereo ci sia un passeggero armato di bomba, la probabilità che ce ne siano due può ritenersi uguale a (1/10.000)(1/10.000) = 1/100.000.000. Due casi del genere, infatti, non sono incompatibili e, in linea teorica, possono essere considerati indipendenti; quindi, la probabilità che si verifichino contemporaneamente, è uguale al prodotto delle loro singole probabilità, come afferma la legge sulla probabilità composta.

Un tale ragionamento è valido, però, se entrambe le situazioni avvengono in maniera casuale. Ma l'azione intenzionale di portarsi dietro una bomba corrisponde a un evento assolutamente certo, al quale deve essere attribuita, quindi, una probabilità uguale a 1. Di conseguenza, siccome: 1×1/10.000 = 1/10.000, si può verificare facilmente che l'espediente di portarsi una bomba in aereo, non ha alcun effetto sulla probabilità che a bordo ce ne sia un'altra.

e. Si prelevano da un mazzo quattro carte: A di picche (Ap), A di cuori (Ac), 2 di quadri (2q) e 2 di fiori (2f) e se ne consegnano due a una persona.

Se questa, dopo averle guardate, afferma: «Una di queste carte è un asso», qual è la probabilità che anche l'altra sia un asso? Se, invece, dichiara: «Una di queste carte è l'asso di picche», la probabilità che anche l'altra sia un asso, rimane la stessa o cambia?

Soluzione

Le quattro carte possono essere abbinate nei seguenti sei modi:

Ap/Ac – Ap/2q – Ap/2f – Ac/2q – Ac/2f – 2q/2f

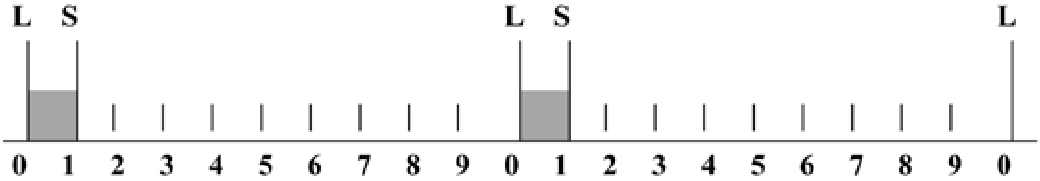
Ci sono, quindi, cinque casi in cui almeno una carta è un asso e, tra questi, ce n'è uno solo in cui entrambe le carte sono assi. Di conseguenza, la risposta al primo quesito è: 1/5.

Ci sono, invece, soltanto tre casi in cui una delle due carte è l'asso di picche e, tra questi, ce n'è uno solo in cui entrambe le carte sono assi. Di conseguenza, la risposta al secondo quesito è: 1/3.

f. Turiddu ha due amiche: Lola e Santuzza, che abitano nella sua stessa città. Siccome gli piacciono entrambe, decide di affidare al caso il criterio con cui frequentarle. In un momento qualsiasi della giornata, si reca a una fermata dove transitano sia l'autobus «L» che porta a casa di Lola, sia quello «S» che porta a casa di Santuzza, e prende il primo dei due che passa. Le vetture della linea «L», come quelle della linea «S», arrivano a intervalli di dieci minuti l'una dall'altra, con assoluta regolarità. Qualche tempo dopo, però, Turiddu si accorge che, in quel modo, gli capita di recarsi da Lola 9 volte su 10. Come si può spiegare una tale apparente anomalia?

Soluzione

Anche se le vetture di una stessa linea si succedono a 10 minuti l'una dall'altra, evidentemente tra l'arrivo di un autobus «L» e di uno «S», trascorre un solo minuto (e, quindi, tra l'arrivo di un autobus «S» e quello di uno «L», trascorrono 9 minuti). Di conseguenza, recandosi casualmente alla fermata, Turiddu ha una sola probabilità su 10 di giungere prima dell'arrivo di un autobus «S» (e 9 su 10 di giungere prima dell'arrivo di un autobus «L»).



g. Si hanno tre scatole identiche per forma e colore; una contiene due monete d'oro, un'altra due monete d'argento e la terza una moneta d'oro e una d'argento. Si chiudono le tre scatole e si dispongono su un tavolo in un ordine qualsiasi; poi, se ne sceglie una a caso e si preleva da questa una moneta, senza guardare l'altra. Se la moneta estratta è d'oro, qual è la probabilità che anche l'altra sia d'oro?

Avendo estratto una moneta d'oro, si può escludere di aver scelto la scatola che conteneva due monete d'argento; quindi, la scatola aperta può essere solo o quella con due monete d'oro o quella con una moneta d'oro e una d'argento. Siccome queste due possibilità sono equivalenti, dovrebbe essere uguale a 1/2 la probabilità che la moneta rimasta nella scatola sia d'argento.

Ma è proprio così?

Soluzione

Per maggiore chiarezza, chiamiamo le tre monete ne seguente modo:

- O_1 e O_2: le due monete d'oro che si trovano nella stessa scatola;
- A_1 e A_2: le due monete d'argento che si trovano nella stessa scatola;
- O_3: la moneta d'oro che si trova nella scatola con quella d'argento;
- A_3: la moneta d'argento che si trova nella scatola con quella d'oro.

$\boxed{\mathbf{O_1 - O_2}}$ $\boxed{\mathbf{A_1 - A_2}}$ $\boxed{\mathbf{O_3 - A_3}}$

Relativamente a tale denominazione, la moneta d'oro estratta può essere:

- O_1 e, in questo caso, l'altra moneta è d'oro (O_2);

- O_2 e, in questo caso, l'altra moneta è d'oro (O_1);
- O_3 e, in questo caso, l'altra moneta è d'argento (A_3).

Siccome in due casi su tre la moneta rimasta nella scatola è d'oro, la relativa probabilità è uguale a: 2/3.

Nota. Questo paradosso è stato ideato dal matematico francese Joseph Louis François Bertrand, che lo propose nel 1889, nel suo libro *Calcul des Probabilités.* Nel 1950, il matematico statunitense Warren Weaver ne propose su Scientific American, una versione che utilizza tre cartoncini: uno con due facce rosse, un altro con due facce nere e un terzo con una faccia rossa e una nera.

h. Jones, un giocatore d'azzardo, mette tre carte coperte sul tavolo. Una delle carte è un asso; le altre sono due figure. Voi appoggiate il dito su una delle carte, scommettendo che sia l'asso. Ovviamente, la probabilità che lo sia realmente è pari a 1/3. Ora Jones dà una sbirciatina di nascosto alle tre carte. Dato che l'asso è uno solo, almeno una delle carte che non avete scelto deve essere una figura. Jones la volta e ve la fa vedere: è una figura. A questo punto, qual è la probabilità che ora il vostro dito sia sull'asso?

Soluzione

Molti pensano che la probabilità sia salita da 1/3 a 1/2. Dopo tutto, ci sono solo due carte coperte, e una deve essere l'asso. In realtà la probabilità rimane 1/3. La probabilità che NON abbiate scelto l'asso rimane 2/3, anche se Jones sembra aver eliminato parzialmente l'incertezza mostrando che una delle due carte non prescelte non è l'asso. La probabilità che l'altra delle due carte non prescelte sia l'asso, tuttavia, resta uguale a 2/3, perché la scelta era avvenuta prima. Se Jones vi desse l'opportunità di spostare la vostra scommessa su quella carta, dovreste accettare (sempre che non abbia qualche carta nella manica, naturalmente).

Nota. Questo problema venne presentato per la prima volta da Martin Gardner, nell'ottobre 1959, in una formulazione diversa (al posto delle tre carte, c'erano tre prigionieri, uno dei quali era stato graziato dal governatore locale). Nel 1990 Marilyn vos Savant, autrice di una popolare rubrica sulla rivista *Parade*, ne propose un'ulteriore versione (che contemplava tre porte, dietro le quali si celavano un'automobile e due capre). La vos Savant fornì la risposta corretta, ma ricevette migliaia di lettere infuriate (molte delle quali, inviate da docenti di matematica …) che l'accusavano di ignorare la teoria delle probabilità. Il caso finì in prima pagina sul New York Times e il problema acquistò in breve tempo una popolarità planetaria, arrivando addirittura a essere votato da una giuria di esperti, come il più bel paradosso probabilistico del secondo millennio.

11. La legge dei grandi rischi

A causa del massiccio proliferare di nuove forme legali di gioco d'azzardo, a cui si sta assistendo negli ultimi anni in Italia, le cronache registrano sempre con maggiore frequenza casi di persone che finiscono per rovinarsi completamente, praticando ossessivamente questi allettanti passatempi, apparentemente innocui. È sconcertante notare, però, come una gran parte di quei mezzi di informazione che denunciano tali drammatici episodi, non rifugga dalla tentazione di dispensare, in apposite rubriche, inconsistenti consigli per arricchirsi *matematicamente* al gioco. È, infatti, proprio la fiducia posta nei sedicenti metodi *sicuri* per vincere la causa principale delle perdite in denaro più cospicue.

La maggioranza di tali sistemi si basa sulla falsa convinzione che, col trascorrere del tempo, tutti gli eventi legati a una determinata situazione siano destinati a realizzarsi una stessa quantità di volte; per cui, più uno di questi tarda a manifestarsi, più cresce, per compensazione, la sua probabilità di verificarsi nell'immediato futuro. Nonostante l'evidenza dei fatti, i sostenitori dell'influenza dei *ritardi* hanno il vezzo di rivendicare la scientificità delle loro elucubrazioni, appellandosi alla *Legge dei grandi numeri* – come se si trattasse di una sorta di entità pensante, capace di intervenire nello svolgimento delle vicende umane …

La validità del teorema di Bernoulli, però, non comporta necessariamente che un eventuale scarto dal valore atteso, riscontrato nell'effettuazione dei primi tentativi, debba essere compensato da quelli successivi (anche se può sembrare una contraddizione). In realtà, ogni risultato fa storia a sé. La convergenza tra frequenza e probabilità è garantita semplicemente dal fatto che, con l'aumentare del numero di tentativi effettuati, l'incidenza di un eventuale scarto dal valore atteso diventa sempre più trascurabile (anche se non arriva a estinguersi del tutto).

Esempio. Si immagini di aver eseguito una lunghissima serie di lanci di una moneta e di aver ottenuto i risultati riportati nella seguente tabella.

Lanci della moneta effettuati	**Quantità di teste uscite**	**Quantità di teste attese**	**Scarto tra i valori attesi e quelli usciti**	**Frequenza di uscita delle teste**
10	4	5	1	0,4
100	46	50	4	0,46
1.000	484	500	16	0,484
10.000	4.936	5.000	64	0,4936
100.000	49.744	50.000	256	0,49744
1.000.000	498.976	500.000	1.024	0,498976

Come si può notare, mentre la frequenza di uscita delle teste si avvicina sempre di più al valore 0,5 della relativa probabilità, lo scarto tra i valori attesi e quelli effettivamente usciti non si compensa, ma anzi cresce in maniera esponenziale.

In ogni caso, bisogna considerare che il valore della probabilità, calcolato prima di cominciare ad effettuare i tentativi (quando, cioè, non se ne può ancora conoscere l'esito), è diverso da quello ricavabile, una volta venuti a conoscenza di alcuni risultati.

Esempio. Se si pensa di lanciare una moneta 4 volte di seguito, si possono prevedere 16 potenziali successioni di uscita, così raffigurabili (T = *testa*, C = *croce*):

TTTT - TTTC - TTCT - TCTT - CTTT - TTCC - TCTC - CTTC

TCCT - CTCT - CCTT - TCCC - CTCC - CCTC - CCCT - CCCC

Come si vede, in un solo caso su 16 si ha l'uscita di 4 *teste* su 4 successivi lanci (TTTT); di conseguenza, la probabilità relativa a un tale evento, calcolata prima di iniziare a lanciare la moneta, è uguale a 1/16 (sensibilmente minore di 1/2).

Ciò non autorizza, però, a dedurre che, se dopo 3 successivi lanci si sono ottenute 3 *teste* di seguito (TTT), diventa più probabile, per compensazione, l'uscita successiva di una *croce*.

Arrivati a questo punto, infatti, delle 16 successioni previste all'inizio, solo 2 sono ancora attuabili: TTTC e TTTT, entrambe con 1/2 di probabilità; tutte le altre, infatti, non possono più essere prese in considerazione, in quanto nessuna di loro inizia con TTT.