

LA RELATIVITÀ GENERALE DI ALBERT EINSTEIN:

UNA TEORIA GEOMETRICA PER LA GRAVITAZIONE

DAVID M. LUCCHESI

Istituto di Fisica dello Spazio Interplanetario – Istituto Nazionale di Astrofisica, Roma

1. Introduzione

La Teoria della Relatività Generale di Albert Einstein [6, 7] costituisce la miglior descrizione che abbiamo dell'interazione gravitazionale, in particolare alle basse energie (campi deboli), come avviene nel laboratorio (naturale) costituito dal nostro sistema solare. Alle alte energie (campi forti), fatto salvo alcune importanti eccezioni [13, 3] – come nel caso di sistemi binari compatti formati da stelle di neutroni – le predizioni della teoria sono meno verificate, sia per le difficoltà pratiche nello sperimentare in campi forti, sia perché la teoria stessa cessa di valere in presenza di singolarità. Il regime dei campi intensi è quello che si deve comunque indagare più a fondo quando siamo interessati a comprendere le prime fasi evolutive dell'universo primordiale, o per capire le proprietà dei buchi neri e delle stesse stelle di neutroni.

La Relatività Generale costituisce inoltre la teoria di riferimento per la cosmologia, quella parte della scienza che cerca di spiegare l'universo nel suo insieme e che cerca di rispondere a domande legate ai suoi costituenti fondamentali, a come esso sia nato e a come evolva. La teoria si caratterizza per bellezza, coerenza interna ed eleganza, costituendo uno dei prodotti più significativi del pensiero umano di tutti i tempi. Oggi, la gravitazione sperimentale, che si occupa in generale della verifica empirica delle leggi dell'interazione gravitazionale [27], costituisce lo strumento principale di verifica della relatività generale: validandola o meno rispetto a teorie alternative ad essa proposte negli anni e fornendo anche un possibile mezzo, dal punto di vista sperimentale, per 'sintonizzare' la relatività con le teorie quantistiche di campo.

Quest'ultimo sembra essere un punto essenziale, dal momento che la relatività non è in grado di spiegare dal punto di vista fisico alcuni dei fatti che essa stessa predice, come le singolarità, quali un buco nero o il Big Bang. Si tratta, in realtà, di situazioni estreme, ma importanti da analizzare e studiare. Essendo infatti la Relatività Generale di Einstein una teoria classica (non quantistica) della gravitazione, essa non riesce a spiegare completamente il 'funzionamento' di un buco nero, ovvero di un 'oggetto' che, nei termini della Relatività Generale, si presenta caratterizzato da densità e curvatura elevatissime, praticamente infinite.

Si pensa che sia la meccanica quantistica a proibire il verificarsi delle singolarità, o meglio degli aspetti non fisici a esse legati, come densità e temperature infinite, situa-

zioni che si verificherebbero in campi gravitazionali infinitamente intensi. Alle fondamenta della Relatività Generale sta il Principio di Equivalenza, uno dei principi meglio verificati della fisica, attualmente con una precisione dell'ordine di 1 parte in 10^{13} [24, 1, 28]. Questo grado di precisione non è al momento sufficiente per dirci se la relatività sia effettivamente la migliore teoria per la descrizione dei fenomeni gravitazionali, almeno in campo debole e per basse velocità, nonostante che tutte le attuali verifiche sperimentali lo confermino. Altre teorie, mutate anche dalla fisica delle particelle e dalla necessità di unificare le diverse interazioni della natura, prevedono violazioni del Principio di Equivalenza, violazioni che possono verificarsi in contesti diversi, sia alle alte sia alle basse energie. Si tratta di teorie che nascono in regime quantistico e con un numero superiore, e di diversa natura, per i 'mediatori' dell'interazione gravitazionale di quanto avvenga invece per la Relatività Generale, ove l'interazione è mediata dal solo tensore metrico.

Il presente contributo vuole mettere l'accento su alcuni dei temi fin qui introdotti, sulle idee fondamentali che portarono Einstein a formulare la sua teoria della gravitazione, con particolare enfasi sul Principio di Equivalenza, la vera pietra angolare di tutta la teoria.

2. Alle fondamenta della Relatività Generale

Tre sono le idee principali alla base della formulazione, nel 1915, della teoria della gravitazione di Albert Einstein. Queste idee legano intimamente la gravitazione, con il concetto di inerzia e con quello di curvatura dello *spazio-tempo*. Le idee ispiratrici della nuova teoria furono: il *Principio di Equivalenza* di Galilei e Newton, il concetto di *curvatura dello spazio* di Riemann e il *Principio di Mach*, con le fondamentali implicazioni che ciascuna di queste idee comporta [4]. La matematizzazione di questi concetti (1907–1915) portò alla formulazione di una delle più belle teorie fisiche mai realizzate dall'uomo, che si caratterizza – come già notato – per una coerenza interna e una eleganza ancora insuperate. È importante aggiungere che, sia dal punto di vista teorico sia da quello sperimentale/osservativo, agli inizi del XX secolo non c'erano spinte per la formulazione di una nuova teoria della gravitazione in sostituzione di quella newtoniana¹. Piuttosto, le tre idee rispondono, oltre che a un'esigenza di tipo fisico, a esigenze di carattere geometrico ed estetico/filosofico.

Adesso analizzeremo brevemente il concetto di curvatura dello spazio di Riemann e il Principio di Mach, mentre nei successivi paragrafi l'attenzione sarà focalizzata sul Principio di Equivalenza.

Le geometrie non-euclidee, di cui fa parte la geometria riemanniana, nascono con la rimozione del V postulato di Euclide che così recita: *dato un punto P esterno ad una*

1 Il problema della anomala precessione del perielio di Mercurio, poi brillantemente spiegato dalla teoria della Relatività Generale, era allora imputato a perturbazioni di origine gravitazionale all'orbita del pianeta causate dalla possibile presenza di un pianeta (Vulcano), o da una fascia di minuscoli corpi, fra l'orbita di Mercurio e il Sole.

retta r su un piano, esiste una e una sola retta passante per P e parallela a r . Dall'ipotesi che nessuna retta passante per P sia parallela alla retta r nasce la geometria riemanniana o ellittica. Viceversa, dalla ipotesi che per P passino infinite rette parallele alla retta r nasce la geometria iperbolica di Bolyai e Lobacevskij.

Gli studi di Georg Friedrich Bernhard Riemann si concretizzano nel 1854 [22] con la generalizzazione dei precedenti lavori di Gauss sulla curvatura di superfici a 2-dimensioni alle superfici a n -dimensioni (con $n > 2$) e con l'introduzione di alcuni concetti matematici assai importanti, come quello di varietà ("riemanniana"), con la sua metrica e curvatura. Un caso particolare è rappresentato dalla geometria della superficie di una sfera bidimensionale. In questo caso le geodetiche sono equivalenti alle rette nel piano, rappresentano la minima distanza fra due punti sulla superficie della sfera e si ottengono dalla intersezione di un piano con detta superficie, purché il piano passi per il centro della sfera stessa². La cosa interessante è che Riemann cercò di applicare questi concetti anche all'universo, parlando di curvatura dello spazio fisico e di come questa debba legarsi alle forze fisiche. In particolare, secondo Riemann, lo spazio curvo 'dice' alle masse come muoversi e queste, per il principio di azione e reazione di Newton, devono a loro volta influenzare lo spazio stesso.

Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach si rese protagonista di un'aspra critica ai fondamenti della meccanica newtoniana [15]. In particolare, secondo Mach, l'accelerazione rispetto allo spazio assoluto di Newton assume significato, nel senso che può venire correttamente compresa, soltanto quando è riferita alla materia che costituisce l'universo, rappresentata dal riferimento delle stelle lontane. Quest'affermazione costituisce il *Principio di Mach*³, profondamente legato ai concetti di massa e di inerzia. Secondo Mach, l'inerzia qui, ovvero l'inerzia locale, ha a che fare con la massa là, ovvero con la materia molto lontana. Il grado di incorporamento del *Principio di Mach* da parte della teoria della Relatività Generale è ancora dibattuto, soprattutto per quanto concerne le sue implicazioni cosmologiche, che dipendono dal tipo di universo possibile, compatto, aperto, o piatto all'infinito.

Per quanto concerne il Principio di Equivalenza, accontentiamoci per il momento di ricordarlo in una formulazione corrispondente a quella di Galileo: *tutti i corpi cadono nel vuoto con la medesima accelerazione, indipendentemente dalla loro massa e composizione chimica*, rimandando al prossimo paragrafo per un maggior approfondimento.

La domanda che adesso possiamo porci è la seguente: *che cosa implicano, dal punto di vista concettuale, le tre idee su cui si basa la teoria di Einstein?* Per rispondere, occorre rivedere radicalmente il nostro concetto di interazione gravitazionale come "forza fra

2 Questi risultati sono intuitivi e si basano sul fatto che la superficie (a due-dimensioni) della sfera è immersa nel "nostro" spazio a tre-dimensioni. Fu proprio Gauss a dimostrare che le proprietà di una superficie possono comunque ricavarsi intrinsecamente dalle sole misure fatte sulla superficie.

3 Fu Einstein stesso a coniare questa espressione.

corpi”. La risposta è la seguente: *la gravità è una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo*.

In altre parole, la gravità non è una forza fisica che si trasmette attraverso lo spazio e il tempo, come vale per la legge di Newton della gravitazione universale o per le altre interazioni note della natura. In sostanza, la gravità è legata alla geometria dell’universo. In effetti, la teoria della gravitazione di Einstein, o teoria della Relatività Generale, viene più correttamente chiamata *geometrodinamica* dagli specialisti del settore. Einstein capì che spazio e tempo giocavano un ruolo fondamentale e che essi non andavano considerati come entità indipendenti ma, bensì, interdipendenti⁴, e che la curvatura era dello *spazio-tempo* e non del solo spazio come aveva concluso mezzo secolo prima Riemann. Per cercare di ‘intuire’ quest’effetto della curvatura dello *spazio-tempo* sulla materia ricordiamo la parabola della mela [17].

Consideriamo un ipotetico universo costituito dalla superficie curva di una mela e gli abitanti di tale universo. Consideriamo due linee parallele che passano da due punti vicini posizionati sull’equatore della mela. Che cosa accadrebbe agli ipotetici abitanti se seguissero tali linee? Supponiamo che essi navighino sulla superficie della mela con ipotetiche imbarcazioni non provviste di timone e quindi possano andare soltanto ‘a dritto’. Con l’allontanarsi delle due imbarcazioni dall’equatore, quindi con il loro conseguente avvicinamento al polo della mela, rappresentato, ad esempio, dal suo picciolo, i due naviganti si avvicinerebbero fra loro con un tasso governato dalla curvatura della mela, fino ad incrociare le loro rotte (magari scontrandosi) in prossimità del picciolo, per poi tornare ad allontanarsi.

Cosa possiamo concludere da questa parabola? La conclusione è che due linee inizialmente parallele si incontrano, per effetto della curvatura della superficie della mela. Il picciolo, cioè, agisce come centro di forza, ovvero come massa nella interpretazione newtoniana della gravitazione.

La teoria geometrica della gravitazione di Einstein può riassumersi nei seguenti tre concetti:

1. localmente le geodetiche appaiono linee rette;
2. su regioni più ampie di spazio e di tempo, geodetiche inizialmente parallele (o che si allontanano) iniziano ad avvicinarsi con un tasso governato dalla curvatura dello *spazio-tempo* – questo effetto della geometria sulla materia è quello che noi chiamiamo gravitazione;
3. la materia, a sua volta, *curva* la geometria.

Quindi, secondo l’interpretazione einsteiniana della gravitazione, lo *spazio-tempo* agisce sulla materia ‘dicendole’ come muoversi e a sua volta la materia reagisce sullo *spazio-tempo* ‘dicendogli’ come incurvarsi. In definitiva, la materia qui influenza la materia là.

⁴ Questo legame fra spazio e tempo è già presente nella Relatività Speciale, formulata da Einstein nel 1905. L’aspetto nuovo sta nella curvatura dello spazio-tempo.

3. Il Principio di Equivalenza: formulazioni di Galileo e Newton

Il Principio di Equivalenza costituisce il cuore della teoria della gravitazione di Einstein o, più correttamente, della *geometrodinamica*. Il principio fu concepito e formulato da Galileo intorno al 1600. Galileo eseguì le prime verifiche sperimentali con corpi in caduta, piani inclinati e pendoli. Successivamente, il principio venne ripreso da Newton (1680) ed espresso in termini di identità fra massa inerziale e massa gravitazionale, eseguendo misure con pendoli e diverse sostanze. Il passo successivo, decisivo, si deve ad Einstein (1907). Cominciamo con il rivedere la formulazione del Principio di Equivalenza data da Galileo nei *Discorsi* (1638), [8]:

Le cose da me sin qui prodotte, ed in particolare questa, che la differenza di gravità, ben che grandissima, non abbia parte veruna nel diversificare le velocità de i mobili, sì che, per quanto da quella dipende, tutti si moverebbero con egual celerità, [...] L'esperienza fatta con due mobili quanto più si possa differenti di peso, col fargli scendere da un'altezza per osservar se la velocità loro sia eguale, patisce qualche difficoltà: [...] E però sono andato pensando di reiterar tante volte la scesa da piccole altezze, ed accumulare insieme tante di quelle minime differenze di tempo, che potessero intercedere tra l'arrivo al termine del grave e l'arrivo del leggiero, che così congiunte facessero un tempo non solo osservabile, ma grandemente osservabile. [...] In oltre, per potermi prevaler di moti quanto si possa tardi, ne i quali manco lavora la resistenza del mezzo in alterar l'effetto che dipende dalla semplice gravità, sono andato pensando di fare scendere i mobili sopra un piano declive, non molto elevato sopra l'orizzontale; ché sopra questo, non meno che nel perpendicolo, potrà scorgersi quello che facciano i gravi differenti di peso [...]

Dalla magnifica prosa scientifica di Galileo si evince come, in questa serie di esperimenti fatti studiando la caduta dei corpi in aria e lungo un piano inclinato, Galileo metta in evidenza l'indipendenza dalla massa (*peso*) della caduta di corpi aventi la stessa composizione chimica, se si riuscisse ad eliminare gli effetti del mezzo, ovvero l'attrito con l'aria. E ancora Galileo scriveva:

[...] e passando più avanti, ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili su 'l detto piano declive: e finalmente ho preso due palle, una di piombo ed una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali, [...] allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare, gli ho dato l'andare nell'istesso momento, ed esse, scendendo per le circonferenze de' cerchi descritti da gli spaghetti eguali, lor semidiametri, passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro; e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate, hanno sensatamente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggiera, che né in ben cento vibrazioni, né in mille, anticipa il tempo d'un minimo momento, ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anco l'operazione del mezzo, il quale, arrecando qualche impedimento al moto, assai più diminuisce le vibrazioni del sughero che quelle del piombo, ma non però che le renda più o men frequenti; anzi quando gli archi

passati dal sughero non fusser più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo di cinquanta o sessanta, son eglin passati sotto i medesimi tempi [...]

In questa parte dei *Discorsi*, Galileo mette in risalto una serie di esperimenti fatti con pendoli utilizzando oggetti di diversa composizione chimica. La precisione delle misure di Galileo nell'accelerazione relativa di caduta dei corpi è dell'ordine di $2 \cdot 10^{-3}$, paragonabile alle misure fatte da Newton, sempre utilizzando dei pendoli, ma diversi decenni dopo. Questa serie di esperimenti è databile fra il 1600 ed il 1602. Possiamo riassumere gli esperimenti di Galileo nell'enunciato già anticipato nel § 2: *tutti i corpi cadono nel vuoto con la medesima accelerazione, indipendentemente dalla loro massa e composizione chimica*.

Emergono quindi chiaramente i seguenti aspetti dagli esperimenti condotti da Galileo:

1. l'importanza di eliminare l'effetto del mezzo;
2. l'indipendenza della caduta libera dalla massa dei corpi;
3. l'indipendenza della caduta libera dalla composizione dei corpi;
4. il concetto di misure locali e della loro relazione con la precisione delle stesse misure.

La formulazione di Newton del Principio di Equivalenza risale al 1680 ed è riportata nei *Principia* [18, 19], Definizione I⁵:

It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of body or mass. And the same is known by the weight of each body; for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, accurately made, which shall be shown hereafter.

Come si evince, Newton si esprime in termini di proporzionalità fra massa inerziale (corpo o massa) e massa gravitazionale (peso)⁶. Successivamente, nel Libro III, Proposizione VI, Teorema VI, a conferma di quanto sopra scrive:

That all bodies gravitate towards every planet; and that the weights of bodies towards any the same planet, at equal distances from the centre of the planet, are proportional to the quantities of matter which they severally contain.

Qui Newton comincia a riportare i risultati dei suoi esperimenti conseguiti utilizzando pendoli e sostanze di diversa composizione chimica:

It has been, now of a long time, observed by others, that all sorts of heavy [...] descend to the earth from equal heights in equal times; and that equality of

5 Qui utilizzeremo una traduzione in Inglese dei *Principia* [19] che, come è noto, furono scritti in Latino da Newton.

6 Si ricorda che i due tipi di massa esprimono proprietà diverse. La massa inerziale misura l'inerzia di un corpo, ovvero la resistenza che questo oppone alle alterazioni del suo stato. La massa gravitazionale esprime invece la capacità di attrazione fra corpi, è una sorta di carica (attrattiva) gravitazionale.

times we may distinguish to a great accuracy, by the help of pendulums. I tried the thing in gold, silver, lead, glass, sand, [...] I provided two wooden boxes, round and equal: I filled the one with wood, and suspended an equal weight of gold (as exactly as I could) in the centre of oscillation of the other. The boxes hanging by equal threads of 11 feet made a couple of pendulums perfectly equal in weight and figure, and equally receiving the resistance of the air [...] I observed them to play together forward and backward, for a long time, with equal vibrations. And therefore the quantity of matter in the gold [...] was to the quantity of matter in the wood as the action of the motive force (or vis motrix) upon all the gold to the action of the same upon all the wood; that is, as the weight of the one to the weight of the other: [...] By these experiments, in bodies of the same weight, I could manifestly have discovered a difference of matter less than the thousandth part of the whole, [...]

Come si può notare, la precisione delle misure effettuate da Newton era di $1 \cdot 10^{-3}$ nell'accelerazione relativa utilizzando pendoli di diversa composizione, dello stesso ordine di grandezza quindi della precisione delle misure fatte da Galileo.

Newton porta il moto dei satelliti di Giove e quello di Giove stesso nel campo del Sole come ulteriore esempio:

[...] since the satellites of Jupiter perform their revolutions in times which observe the sesquiphate proportion of their distances from Jupiter's centre, their accelerative gravities towards Jupiter will be reciprocally as the squares of their distances from Jupiter's centre; [...] that the weights of Jupiter and of his satellites towards the sun are proportional to the several quantities of their matter, appears from the exceedingly regular motions of the satellites [...] if some of those bodies were more strongly attracted to the sun in proportion to their quantity of matter than others, the motions of the satellites would be disturbed by that inequality of attraction [...]

Riassumendo, Newton osservò che:

1. le Lune di Giove rivoluzionano intorno a esso come se l'effetto di *attrazione gravitazionale* del Sole fosse nullo;
2. questo è vero se l'attrazione provocata dal Sole su Giove e le sue Lune è la stessa;
3. la forza di gravità prodotta dal Sole deve essere proporzionale alla massa inerziale del corpo da esso attratto.

4. Il Principio di Equivalenza: formulazione di Einstein

Einstein fece proprie le formulazioni di Galileo e Newton del Principio di Equivalenza e andò oltre. Il Principio di Equivalenza di Einstein (PEE) è alla base della Relatività Generale (RG) e della sua struttura geometrica. Con Einstein si hanno tre formulazioni del Principio di Equivalenza.

1. DEBOLE: è alla base delle teorie *praticabili* della gravitazione;

2. MEDIO-FORTE: è alla base delle teorie *metriche* della gravitazione compresa la RG;
3. MOLTO-FORTE, è una caratteristica della RG, ovvero della *geometrodinamica* di Einstein.

Sottolineiamo la differenza tra queste tre formulazioni perché quelle di Newton ed Einstein non sono le uniche teorie della gravitazione. Una teoria si dice *metrica* quando prevede uno *spazio-tempo* curvo e si basa sul PEE. In particolare, una teoria si dice *praticabile* se soddisfa i seguenti requisiti: i) è completa, ii) è auto-consistente, iii) è relativistica, iv) possiede il corretto limite newtoniano.

Per *completezza* di una teoria si intende che essa è in grado di analizzare i risultati di un dato esperimento a partire da alcuni ‘principi primi’. Una teoria è *auto-consistente* quando predice risultati univoci per un dato esperimento. Una teoria si dice *relativistica* quando, in assenza di effetti gravitazionali, le leggi non-gravitazionali della fisica si riducono a quelle della relatività speciale. Infine, una teoria si dice *newtoniana* quando, nel limite di campi gravitazionali deboli e basse velocità rispetto a quella della luce, i risultati della teoria concordano con quelli newtoniani.

Come arrivò Einstein alla sua formulazione del Principio di Equivalenza? Partì dall’osservazione che in un sistema di riferimento accelerato (ovvero non-inerziale nella visione newtoniana) si avverte una forza apparente che è proporzionale alla massa (inerziale) del corpo su cui agisce ed è opposta all’accelerazione del sistema di riferimento. Ma allora la forza apparente nel riferimento accelerato gode della stessa proprietà della forza di gravità di Newton (per la seconda legge della dinamica): entrambe sono *proporzionali* alla massa inerziale del corpo sul quale agiscono.

È opportuno notare che si tratta di un risultato sperimentale: non c’è una spiegazione teorica per questo fatto. Secondo Einstein *l’identità* delle due masse, ossia la *proporzionalità* delle due forze (quella di gravità e quella apparente) con la massa non è casuale, ma piuttosto esprime la *vera natura* della gravitazione.

Si consideri un sistema di riferimento in caduta libera – il famoso ascensore di Einstein con i cavi recisi – e una pallina libera posizionata nel centro di massa dell’ascensore. Si osserverà che la pallina non si muove rispetto alle pareti e al pavimento o al tetto dell’ascensore. Perché? Perché la forza risultante, somma di quella di gravità rivolta verso il basso e di quella apparente rivolta verso l’alto, è nulla⁷. Questo risultato non solo implica l’identità fra massa inerziale m_i (quella al secondo membro della seconda legge della dinamica) e quella gravitazionale m_g (quella che compare nella legge della gravitazione universale di Newton), ma implica anche l’assenza di *peso*. Allora, poiché la forza risultante è nulla, se alla pallina diamo una piccola spinta, in accordo con il *Principio di Inerzia* di Galileo, questa si muoverà di moto rettilineo e uniforme.

⁷ Si noti che l’accelerazione apparente, eguale e opposta a quella del riferimento in caduta libera, è anche eguale in modulo a quella di gravità della pallina, perché questa è collocata nel centro di massa dell’ascensore.

Quindi, se ci dimentichiamo della forza di gravità, il riferimento in *caduta libera* altro non è che un riferimento inerziale! Sostanzialmente è come trovarsi in un riferimento (laboratorio) che, lontano da qualsiasi corpo, si muove di moto rettilineo e uniforme. La conclusione di Einstein è la seguente:

eseguendo un qualsiasi esperimento di fisica all'interno del riferimento in caduta libera, dai risultati locali non potrò distinguere il mio riferimento da quello costituito da un riferimento inerziale lontano da qualsiasi campo gravitazionale.

Attenzione: quest'affermazione vale solo localmente (sia nello spazio che nel tempo) perché il campo gravitazionale non è uniforme, ovvero esistono le forze di marea.

Il lettore potrebbe chiedersi: *ma cosa c'entrano le forze di marea con il Principio di Equivalenza?* Inoltre, se le forze di gravità della Luna e del Sole si annullano in un riferimento in caduta libera: *come possiamo parlare delle maree provocate da tali corpi?* La risposta a tali domande sta proprio nel significato locale del Principio di Equivalenza, ossia: i riferimenti in caduta libera sono localmente (nello spazio e nel tempo) equivalenti a un riferimento inerziale.

Al fine di capire meglio questo punto, consideriamo una Terra sferica⁸. In questo caso l'accelerazione di gravità è, come noto dalla legge di Newton della gravitazione universale ($F_G = G M_g m_g / r^2$), inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Allora, oggetti a diversa distanza dal centro della Terra saranno soggetti a diverse accelerazioni: maggiore è la distanza dal centro della Terra, minore risulterà l'accelerazione.

Supponiamo di considerare, nel nostro riferimento in caduta libera, tre palline e non una come in precedenza, allineate lungo la direzione radiale, con quella centrale ancora posizionata nel centro di massa dell'ascensore e le altre poste sopra e sotto a distanza D da questa. La forza apparente è la stessa per le tre palline ma, mentre questa eguaglia la forza di gravità per la pallina posizionata nel centro di massa, per quella posizionata sopra risulta maggiore, perché questa è più lontana dal centro della Terra, mentre per quella posizionata sotto, risulta inferiore, perché questa risulta più vicina al centro della Terra. La forza risultante non è più nulla per queste palline e, nel riferimento dell'ascensore, vedremo quella più distante dal centro della Terra spostarsi verso il soffitto, mentre quella più vicina spostarsi verso il pavimento. Quindi le distanze relative fra le palline crescono. Ecco, in questi spostamenti relativi si esplicano le forze di marea che, nella visione di Einstein, misurano la curvatura dello *spazio-tempo*.

Se supponiamo di sostituire le palline con una nube sferica di particelle d'acqua attorno al centro di massa dell'ascensore in caduta libera, vedremo la nube sferica trasformarsi in un ellissoide, stirandosi nella direzione radiale e schiacciandosi trasversalmente: si forma l'ellissoide di marea. Questo è ciò che avviene per gli oceani e la crosta terrestre, perché la Terra è in caduta libera nei campi gravitazionali di Luna e Sole. La forza residua (non cancellata) delle maree lunari è circa il doppio di quelle solari.

⁸ Il fatto che la Terra reale non sia sferica non altera i termini della discussione che segue.

Questo lo si può capire dalla espressione matematica della forza di marea che, con ottima approssimazione, è data da $\Delta F \cong 2(GM_g m_g / r^3)D$.

Come si può notare, la forza di marea, al pari quella di gravità, dipende dal prodotto delle masse ma è inversamente proporzionale al cubo della distanza e non al suo quadrato. Inoltre, la forza di marea è proporzionale alla distanza D , ovvero alla dimensione caratteristica dell'oggetto su cui agisce. L'equazione ci spiega quindi perché le maree lunari sono più grandi di quelle solari: sebbene la Luna abbia una massa molto più piccola di quella del Sole, essa è molto più vicina. Infine, sebbene questa nostra discussione si sia basata su un'espressione newtoniana, la sua dipendenza dalla separazione D ci aiuta a capire l'importanza del concetto di *locale* nella formulazione del Principio di Equivalenza.

A questo punto possiamo esplicitare le tre formulazioni di Einstein del Principio di Equivalenza [4].

Formulazione DEBOLE: *il moto di una qualsiasi particella di prova in caduta libera è indipendente dalla sua composizione e struttura.*

La formulazione DEBOLE è anche indicata in termini della *universalità della caduta libera* e si basa sul principio secondo il quale il rapporto fra la massa inerziale e quella gravitazionale è costante.

Per “particella di prova” si intende una particella:

1. elettricamente neutra;
2. con energia di legame gravitazionale trascurabile rispetto alla sua massa a riposo;
3. con momento angolare trascurabile;
4. sufficientemente piccola da far sì che le eventuali disomogeneità del campo gravitazionale all'interno del suo volume abbiano un effetto trascurabile sul suo moto.

In definitiva, l'enunciato DEBOLE del Principio di Equivalenza di Einstein può anche enunciarsi come segue: *in un qualsiasi riferimento locale (non rotante) in caduta libera, la traiettoria seguita da una particella di prova in caduta libera è una linea retta, in accordo con la relatività speciale.*

Formulazione MEDIO-FORTE: *per ogni evento “puntiforme” dello spazio-tempo esiste un intorno sufficientemente piccolo, tale che, in ogni riferimento locale in caduta libera in tale intorno, tutte le leggi non-gravitazionali della fisica obbediscono alle leggi della relatività speciale.*

Con questa formulazione Einstein generalizza il Principio di Equivalenza a tutte le leggi della fisica esclusa la gravitazione stessa. In tal modo, Einstein postula che in nessun riferimento in *caduta libera* sia possibile rilevare l'esistenza di un *campo gravitazionale* da un qualsiasi esperimento di fisica *non-gravitazionale*: meccanico, termodinamico, elettromagnetico, nucleare, ... Quando in letteratura si parla di PEE, solitamente

ci si riferisce alla presente formulazione MEDIO-FORTE. Tale principio è soddisfatto dalla RG (*Geometrodinamica*) e dalle teorie *metriche* della gravitazione.

Formulazione MOLTO-FORTE: *per ogni evento “puntiforme” dello spazio-tempo esiste un intorno sufficientemente piccolo tale che, in ogni riferimento locale in caduta libera in tale intorno, tutte le leggi della fisica obbediscono alle leggi della relatività speciale.*

La presente formulazione è estesa a TUTTE le leggi della fisica – non solo a quelle *non-gravitazionali*, come nella formulazione MEDIO-FORTE. Inoltre, la formulazione MOLTO-FORTE del Principio di Equivalenza è una peculiarità della RG di Einstein, quindi è alla base della sua *geometrodinamica*.

5. Lo spazio-tempo della relatività

Esiste un concetto intuitivo, oltre a quello delle forze di marea, che possa aiutarci ulteriormente a comprendere un po' più a fondo la teoria della gravitazione di Einstein e, in particolare, le proprietà dello *spazio-tempo*? E poi, che cosa è il *tensore metrico* citato nell'Introduzione?

Partiamo da un esempio concreto. Come possiamo descrivere il moto di un corpo, diciamo di un punto materiale o particella, secondo la relatività di Einstein? In relatività si parla in termini di *linea di universo* seguita dalla particella. Nella fisica galileiana e newtoniana sappiamo come procedere: si usa il tempo (assoluto) t come parametro per descrivere le successive posizioni assunte dalla particella nello spazio tridimensionale euclideo. Se con \vec{r} indichiamo la posizione (vettore) spaziale della particella, la traiettoria sarà descritta da $\vec{r}(t)$, che fornisce la legge oraria.

In relatività le cose stanno diversamente perché il tempo t è una semplice coordinata (assieme a quelle spaziali)⁹ e non ha il carattere assoluto che ha nella fisica newtoniana (“vero”, “matematico”, che scorre indipendentemente da tutto il resto). Abbiamo allora bisogno di un nuovo parametro che abbia un carattere assoluto e con la caratteristica di crescere (dal passato al futuro) lungo la *linea di universo* della particella. Questo parametro prende il nome di *tempo proprio* della particella e rappresenta una “lunghezza” nello *spazio-tempo*. Si dice anche che è un *invariante*. Indichiamolo con la lettera τ dell'alfabeto greco.

Il *tempo proprio* è il tempo che segna un orologio attaccato alla particella, cioè che viaggia con il corpo. Il fatto che sia un *invariante* dello *spazio-tempo* significa che non dipende dal sistema di coordinate utilizzato per descrivere il moto della particella: in altre parole, assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Per comprendere questa frase si deve capire il termine “lunghezza” nello *spazio-tempo*.

Nella geometria euclidea, la distanza fra due punti, o, se si preferisce, la lunghezza di un'asta rigida, è una grandezza invariante. Infatti, indipendentemente dal sistema di coordinate spaziali utilizzate, il suo valore è sempre lo stesso e si ottiene applicando il Teorema di Pitagora. Cambiano i valori delle componenti (due se operiamo nel piano,

⁹ Ricordiamoci che in precedenza abbiamo sottolineato come in relatività spazio e tempo siano interdipendenti.

tre se operiamo nello spazio), ma non la radice quadrata della somma dei loro quadrati. In altri termini, indipendentemente dal sistema di coordinate, la lunghezza dell'asta è quel numero che otteniamo misurando direttamente la distanza fra i suoi estremi con un metro. Se assumiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, per il quadrato della lunghezza $\Delta\ell$ dell'asta possiamo scrivere $\Delta\ell^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, con ovvio significato per i diversi simboli.

Nel caso dello *spazio-tempo* piatto della relatività speciale, la lunghezza invariante $\Delta\tau$ è legata alle coordinate spazio-temporali da una relazione analoga alla precedente ma con una piccola (ma sostanziale) differenza di segno, ovvero $\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$. In questa espressione si è implicitamente assunto di utilizzare le stesse unità per tutte le coordinate; ad esempio, possiamo misurare tutte le coordinate in secondi o tutte in centimetri. La velocità della luce c , che è costante e invariante, gioca semplicemente il ruolo di un fattore di conversione dalle unità di distanza a quelle di tempo, o viceversa, ed è stata assunta eguale a 1 nello scrivere l'espressione per l'intervallo di *tempo proprio* $\Delta\tau$.

I coefficienti che moltiplicano i quadrati delle coordinate nell'espressione della lunghezza dello *spazio-tempo*, rispettivamente $[1, -1, -1, -1]$, rappresentano le componenti del tensore metrico dello *spazio-tempo* piatto della relatività speciale¹⁰.

Questo è ciò che accade nella relatività speciale, ma come cambiano le cose in relatività generale? In altre parole, quale è l'effetto della *curvatura* dello *spazio-tempo* sul tensore metrico? La risposta sta in quanto detto nel § 4.

In relatività generale non è possibile costruire un riferimento inerziale per così dire "globale", ovvero: in presenza di campi gravitazionali non è possibile coprire tutto lo *spazio-tempo* con un singolo riferimento inerziale. Al contrario, i riferimenti inerziali (per il Principio di Equivalenza) hanno solo un significato locale (nello spazio e nel tempo) e sono i riferimenti (non rotanti) in caduta libera. In tali riferimenti possiamo localmente annullare la gravità a meno delle forze di marea, che risultano una misura della curvatura dello *spazio-tempo*.

Per dirla in termini puramente matematici, se indichiamo con η il tensore metrico dello *spazio-tempo* piatto della relatività speciale e con \mathbf{g} quello dello *spazio-tempo* curvo della relatività generale, per il Principio di Equivalenza in un riferimento in caduta libera (localmente) \mathbf{g} tenderà a η ($\mathbf{g} \rightarrow \eta$). In tale riferimento si potranno annullare le derivate prime di \mathbf{g} , ma non le derivate seconde che si legano alla curvatura. Per dirla ancora in altri termini, in relatività generale le componenti del tensore metrico dipendono dalle coordinate stesse e, qualunque sistema di coordinate si scelga fra tutti i possibili sistemi di coordinate, non se ne troverà mai uno in cui tali componenti risultino formate dalla sequenza $[1, -1, -1, -1]$.

¹⁰ Non ci interessa approfondire ulteriormente che cosa sia un tensore. Per chi ha familiarità con l'algebra lineare possiamo ulteriormente sottolineare che si tratta di una matrice 4×4 diagonale i cui elementi sono dati da $[1, -1, -1, -1]$ nel caso dello spazio-tempo piatto della relatività speciale introdotto nel testo.

6. Osservazioni cosmologiche e modelli teorici

Ci sono evidenze *osservative* così come argomenti *teorici* sulla base delle quali si prevedono modifiche alla struttura geometrica della Relatività Generale e possibili violazioni del Principio di Equivalenza.

A) EVIDENZE OSSERVATIVE. Le evidenze *osservative* si basano principalmente sull'espansione dell'universo e la sua accelerazione da una parte e sugli (apparentemente) anomali comportamenti dei moti delle stelle alla periferia delle galassie¹¹ dall'altra, osservazioni attualmente interpretate con la (possibile) presenza di ciò che i fisici hanno chiamato, rispettivamente, *energia oscura* e *materia oscura*. Infatti, a partire dalla fine degli anni '90 del secolo scorso, le misure della distanza di galassie lontane grazie alle esplosioni di *Supernovae* Ia [10], che fungono da candele standard, così come le misure sempre più precise della distribuzione della radiazione cosmica di fondo - il residuo fossile a circa 2.7 K del Big Bang - e delle sue fluttuazioni [5,14], hanno mostrato che la materia così come la conosciamo (si dice barionica) sembra costituire soltanto il 4% della massa-energia presenti nell'universo visibile. Circa il 73% dell'universo sarebbe costituito da una qualche forma di energia non spiegabile (apparentemente) dalle nostre attuali leggi della fisica, a cui è stato dato il nome di *energia oscura*. Il restante 27% sarebbe costituito da materia, la cui la stragrande maggioranza (il 23% dei costituenti dell'universo) si presenterebbe non visibile e principalmente dislocata all'interno delle galassie e, in particolar modo, all'interno degli ammassi di galassie, a cui è stato dato quindi il nome di *materia oscura fredda*.

B) ARGOMENTI TEORICI. Gli argomenti *teorici* si basano sul fatto che la teoria di Einstein è una teoria *classica* della gravitazione, ovvero *non-quantistica*, mentre le altre forze della natura si interpretano in una teoria quantistica delle diverse interazioni, che ha portato al *Modello Standard* [11, 26, 23] della fisica delle particelle: l'interazione elettromagnetica, l'interazione nucleare forte e l'interazione nucleare debole. A oggi, tutti gli sforzi effettuati nell'unificare l'interazione gravitazionale, e quindi il suo modello standard, ovvero la Relatività Generale, con le altre interazioni fondamentali della natura in un'unica teoria quantistica dei campi sono falliti. Questi sforzi prevedono l'introduzione di nuovi campi (scalari, vettoriali, tensoriali) in aggiunta al tensore metrico \mathbf{g} di Einstein, che portano, naturalmente, a una violazione del Principio di Equivalenza.

In particolare, negli ultimi trent'anni la comunità dei fisici teorici si è sempre più focalizzata sulla *teoria delle stringhe* [2] e sulle sue possibili varianti. Secondo questa teoria¹² le diverse particelle del *Modello Standard* altro non sarebbero che diverse "manifestazioni" di un'entità chiamata *stringa* (o *corda*): a seconda della frequenza di oscil-

11 Si tratta delle curve di rotazione delle galassie che tendono a diventare asintoticamente piatte ad un valore costante della velocità periferica, quando ci si aspetterebbe, dal punto di vista classico, un andamento del tipo $v \propto 1/\sqrt{r}$.

12 Si tratta di una teoria molto ambiziosa chiamata anche Teoria del Tutto.

lazione di una corda, essa si manifesterebbe come elettrone piuttosto che come protone o come una qualsiasi altra particella nota¹³. Una delle predizioni della teoria delle stringhe riguarda le dimensioni dello *spazio-tempo*. Queste non sarebbero soltanto le quattro discusse in precedenza, ma potrebbero essere 10 o 11, o addirittura 26, a seconda della variante che si considera di questa teoria. La teoria delle stringhe, che si propone di unificare le diverse interazioni della natura – e di avere come limite sia la meccanica quantistica sia la relatività generale – dovrebbe quindi anche fornirci la corretta teoria della gravità quantistica tanto cercata dai fisici.

Ma le cose stanno proprio così? Si è certi di queste misure? O meglio, si è certi nel considerarle nel giusto contesto fisico? Sono corrette le equazioni che utilizziamo per i possibili modelli cosmologici? E, in esse, è preso nella giusta considerazione il ruolo della costante cosmologica Λ ? Ci sono riscontri sperimentali alle predizioni della teoria delle stringhe? Risponderemo a tali domande cercando di mettere in evidenza alcune questioni aperte:

1. Le osservazioni ci dicono che su grande scala l'universo è spazialmente piatto, ovvero euclideo. Queste osservazioni, anche se corrette, si riferiscono a una porzione (quella visibile) dell'universo in cui viviamo – si dice “alla scala del nostro orizzonte”, che è dell'ordine dell'inverso della costante di Hubble H , cioè pari a circa 13,7 miliardi di anni. Le dimensioni spaziali dell'universo, sulla base dei modelli cosmologici, dovrebbero essere più grandi di almeno un fattore 10 tenendo conto delle osservazioni. Ma allora la curvatura globale dell'universo non potrebbe evidenziarsi oltre il limite $\approx 1/H$? (Ciò in analogia con quel che avviene per la superficie curva della Terra e l'orizzonte apparente piatto di un suo osservatore qualsiasi.);
2. Recentemente i comportamenti anomali delle stelle di ben 47 galassie, particolarmente ricche di gas interstellare, sono stati interpretati in buon accordo con una modifica della interazione gravitazionale di Newton che prende il nome di teoria di MOND¹⁴ [16], dunque *senza ricorrere alla materia oscura fredda*. Possibile allora che la *materia oscura* conti per le misure riguardanti la radiazione cosmica di fondo e non per le curve di rotazione delle galassie? Tutto questo è coerente con il *Principio Cosmologico* (implicitamente ammesso in cosmologia)¹⁵ secondo cui, ovunque si osservi l'universo nel suo complesso,

13 Ciascun modo di oscillazione si caratterizza per un certo numero di numeri quantici che rappresentano quindi i diversi tipi di particelle che conosciamo. In una maniera molto intuitiva possiamo dire che le diverse particelle si manifestano come le diverse note musicali da una singola corda di violino a seconda di come questa venga pizzicata.

14 Acronimo di MODified Newtonian Dynamics. Una delle predizioni di questa teoria riguarda la relazione esistente fra la massa della galassia e l'andamento piatto della curva di rotazione delle galassie.

15 Il Principio Cosmologico ha più una natura filosofica che fisica, esso vorrebbe dirci che non ci troviamo in nessun punto privilegiato (sia nello spazio che nel tempo) dell'universo.

questo si presenta omogeneo e isotropo?

3. La costante cosmologica Λ fa parte naturalmente delle equazioni dei campi di Einstein e giocherebbe un ruolo fondamentale per interpretare l'espansione dell'universo e la sua accelerazione *senza ricorrere all'energia oscura*;
4. Fino a oggi non esiste una verifica sperimentale delle previsioni della teoria delle stringhe, o, per dirla ancora più esplicitamente, nessuna delle previsioni della teoria è verificabile dal punto di vista sperimentale;
5. Infine – e, forse, cosa ancor più significativa – se vogliamo dar credito alla teoria della gravitazione di Einstein, dobbiamo anche considerare che le equazioni dei campi della relatività generale sono molto complicate da risolvere dal punto di vista matematico, salvo alcuni (rari) casi caratterizzati da particolari simmetrie. Quindi, forse non siamo ancora in grado di trovare le soluzioni, in certi contesti, che ci permetterebbero di interpretare correttamente le evidenze osservative, almeno laddove gli effetti quantistici sono trascurabili.

Non possiamo qui approfondire ulteriormente le cinque questioni, i cui aspetti sono comunque incompleti per fornire un quadro esauriente dello *status dell'arte* di osservazioni e teorie fisiche. Tali aspetti sono stati introdotti perché mettono in evidenza quanto sia difficile 'costruire', oggi più di ieri, un paradigma cosmologico soddisfacente e, in definitiva, quanto sia importante verificare la teoria della gravitazione di Einstein in tutte le sue possibili previsioni.

7. Conclusioni

Nei precedenti paragrafi sono state introdotte le *idee* ispiratrici della teoria della gravitazione di Albert Einstein, o *geometrodinamica*. Il cuore della teoria si fonda sul Principio di Equivalenza di Einstein, base della relatività generale e della sua struttura geometrica. Esso è quindi alle fondamenta della teoria e la sua continua verifica sperimentale costituisce una delle più importanti attività della moderna fisica fondamentale.

Fino a oggi, la teoria di Einstein ha superato brillantemente tutte le verifiche sperimentali, soprattutto in campo debole, come vale per gli esperimenti condotti nei laboratori terrestri e per quelli eseguiti nel sistema solare, ma anche in campi più intensi (sistema binario con pulsar al milli-secondo).

Tutto questo non è, però, sufficiente. Come si è accennato nel § 6, le osservazioni cosmologiche non sono (apparentemente) spiegabili in termini della sola teoria della gravitazione di Einstein. Inoltre, le verifiche delle previsioni della relatività generale in campi estremamente intensi non sono mai state effettuate e richiedono (probabilmente) una teoria quantistica della gravitazione. Da questo quadro generale risulta l'importanza di nuove e più precise misure delle predizioni della teoria della relatività generale e, in particolare, della verifica della validità del Principio di Equivalenza di Einstein nelle sue diverse formulazioni: DEBOLE, MEDIO-FORTE, MOLTO-FORTE.

Nella Introduzione abbiamo segnalato come esso sia oggi verificato con una preci-

sione dell'ordine di 1 parte in 10^{13} . Queste misure sono state ottenute confrontando l'accelerazione relativa di caduta libera di sostanze con diversa composizione chimica nel campo del Sole utilizzando una bilancia di torsione rotante – tramite esperimenti di laboratorio – e comparando la caduta di Terra e Luna nel campo del Sole tramite la tecnica del Lunar Laser Ranging (LLR)¹⁶. Una maggiore precisione – di qualche ordine di grandezza – nella verifica del Principio di Equivalenza consentirebbe (eventualmente) di poter discriminare fra le diverse teorie alternative della gravità, che prevedono violazioni per diversi valori della accelerazione relativa di caduta libera di corpi con diversa composizione chimica.

La svolta potrebbe aversi con sofisticati (e precisi) esperimenti di caduta libera a bordo di satelliti artificiali attorno alla Terra. La caduta libera e il segnale di riferimento relativamente grande, l'accelerazione orbitale essendo in questo caso circa tre ordini di grandezza più grande¹⁷ rispetto a quella della Terra nel campo del Sole, consentono l'utilizzo di masse di diversa composizione molto più grandi rispetto a quelle degli esperimenti terrestri, con il grande vantaggio di essere però debolmente accoppiate e con lunghi tempi di integrazione – ossia di raccolta dati – contro i pochi secondi della caduta libera in esperimenti da torri di caduta. Le masse debolmente accoppiate (diciamo a mezzo di opportune molle) in caduta libera – per esempio, due cilindri di diversa composizione con gli assi ed i centri di massa coincidenti – costituiscono un accelerometro differenziale che, se messo in rotazione, consente di modulare il segnale di un'eventuale violazione del Principio di Equivalenza a una ben determinata frequenza, con il vantaggio di separare questo segnale da altri effetti perturbativi che potrebbero mascherare o mimare il segnale (eventuale) di violazione.

Fra le diverse proposte di missione di questo genere segnaliamo *Galileo Galilei (GG)* dell'Università di Pisa. Questo esperimento, in avanzata fase di studio e progettazione, potrebbe verificare *l'universalità della caduta libera*, ovvero la forma DEBOLE del Principio di Equivalenza, con una precisione dell'ordine di 1 parte in 10^{17} [20], corrispondente a un salto in avanti di ben 4 ordini di grandezza!

Termina qui questa Lettera principalmente focalizzata sui fondamenti della *geometrodinamica* di Einstein, con particolare attenzione al Principio di Equivalenza e alla struttura dello *spazio-tempo*. L'argomento è assai vasto, con collegamenti fra fisica teorica, esperimenti, osservazioni e modelli cosmologici, ciascuno dei quali richiederebbe, anche per una semplice trattazione divulgativa, molto più spazio. La speranza è di aver destato nel lettore un interesse da coltivare ulteriormente con letture più approfondite e finalizzate. Segnalo, a questo proposito, una serie di testi a carattere divulgativo per

16 Da opportune stazioni laser terrestri si sparano impulsi di breve durata verso degli specchi laser riflettori posizionati sulla superficie della Luna. Dalla misura del tempo di andata e ritorno si risale alla misura della distanza del nostro satellite naturale (con accuratezza centimetrica) e da questa, tramite opportuni modelli, ad una serie di parametri legati alla geofisica della Luna (struttura interna, librazioni, ...) e alla Relatività Generale.

17 Per satelliti in orbita bassa, diciamo 500 km in altezza, l'accelerazione di gravità g è circa 8.4 m/s^2 .

approfondire i temi discussi nella presente Lettera¹⁸: per la relatività, si consigliano [25] e [21]; per la meccanica quantistica, [9]; infine, per la teoria delle stringhe, [12].

¹⁸ La Bibliografia citata fino a questo punto, ad eccezione di alcune voci [15,8,18,19], è piuttosto specialistica e di non facile lettura.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Baeßler, S., Heckel, B. R., Adelberger, E. G., et al., Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3585 (1999).
- [2] Becker, K., Becker, M., and Schwarz, J. H., *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [3] Burgay, M., D'Amico, N., Possenti, A., et al., An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system, *Nature* 426, 531-533 (2003).
- [4] Ciufolini I., Wheeler, J. A., *Gravitation and Inertia*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [5] De Bernardis P., et al., Multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background: significance and consequences for cosmology, *The Astrophys. Journ.* 564, 559 (2002).
- [6] Einstein, A., Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys.* 354, 769 (1916).
- [7] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955.
- [8] Galilei, G., *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze*, Elsevier, 1638.
http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_etc/html/index.htm.
- [9] Gilmore, R., *Alice nel paese dei quanti. Le avventure della fisica*, Raffaello Cortina, Milano 1996.
- [10] Glanz, J., Astronomy: Cosmic Motion Revealed, *Science* 282 n. 5397, 2156 (1998).
- [11] Glashow, S., Partial-symmetries of weak interactions, *Nucl. Phys.* 22, n. 4, 579 (1961).
- [12] Green, B., *L'universo elegante*, Einaudi, Torino 1999.
- [13] Hulse, R. A., Taylor, J. H., Discovery of a pulsar in a binary system, *Astrophys. J.* 195, L51-3 (1975).
- [14] Jarosik N., et al., Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: sky maps, systematic errors, and basic results, *The Astrophys. Journ. Suppl. Series*, 192:14 (2011).
- [15] Mach, E. F. J. W., *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, 1883; trad. it. *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, 1908 (Boringhieri, Torino, 1977).
- [16] Milgrom, M., A modification of the Newtonian Dynamics: implication for Galaxies, *The Astrophys. Journ.* 270, 371 (1983).
- [17] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J.A., *Gravitation*. W.H. Freeman & Company, San Francisco, 1973.

- [18] Newton, I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687; trad. it. *Principi matematici della filosofia naturale*, Utet, Torino 1997.
- [19] Newton, I., *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, A. Motte, D. Adee, New York, 1846. <http://www.archive.org/details/newtonspmathema00newtrich>.
- [20] Nobili, A. M., et al., “Galileo Galilei” (GG) a small satellite to test the equivalence principle of Galileo, Newton and Einstein, *Exp. Astron.* 23, 689 (2009). <http://eotvos.dm.unipi.it/ggproject.html>.
- [21] Penrose, R., *Il grande, il piccolo e la mente umana*, Raffaello Cortina, Milano, 1998.
- [22] Riemann, G. F. B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in Id., *Gesammelte Mathematische Werke* (1866); trad. it. in *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.
- [23] Salam, A., Svartholm, N., *Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity*, Nobel Symposium n. 8, Almquist and Wiksell, Stoccolma 1968.
- [24] Su, Y., Heckel, B. R., Adelberger, E. G., et al., New tests of the universality of free fall, *Phys. Rev. D* 50, 3614 (1994).
- [25] Taylor, E. F., Wheeler, J. A., *Fisica dello spazio-tempo*, Zanichelli, Bologna 1999.
- [26] Weinberg, S., A Model of Leptons, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1264 (1967).
- [27] Will, C. M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge/New York 1993. <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3>.
- [28] Williams, J. G., Turyshev, S. G., Boggs, D. H., Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity, *Phys. Rev. Lett.* 93, 261101 (2004).